<u>אלגוריתמים / תרגיל 2#</u>

אריאל סטולרמן
קבוצה 02

(1)

להלן אלגוריתם למציאת כל הגשרים בגרף לא מכוון $G=\{E, V\}$:

- כמו האלגוריתם בתרגול, נריץ DFS על G, ונכוון קשתות עץ מהורה לבן וקשתות אחוריות מבן לאב קדמון.
- על הגרף המכוון שקיבלנו נפעיל את האלגוריתם מהשיעור לבניית גרף רק״חים של G.
- לאחר קבלת גרף הרק״חים המתאים ל-G, נחזיר את רשימת הקשתות שלו – כולן גשרים בגרף המקורי G.

הוכחת נכונות:

- בשלב הראשון, כל מעגל שנקבל הוא רק״ח או חלק מרק״ח, ולכן כל קשת שאינה ברק״ח, אינה על מעגל ולכן גשר.
- אלגוריתם בניית גרף הרק״חים הוכח בשיעור.
- רשימת הקשתות של גרף הרק״חים היא רשימת כל הקשתות שאינן חלק מרק״ח (אחרת לא היו קשתות בגרף הרק״חים), ולכן אינן על מעגל. לכן כל הקשתות האלה הן כל הגשרים בגרף המקורי.

סיבוכיות זמן ריצה:

- השלב הראשון מריץ DFS ומכוון בדרך ללא השפעה על סיבוכיות: $O(|E|+|V|)$.
- השלב השני גם רץ ב-$O(|E|+|V|)$, כפי שהוכח בשיעור.
- השלב השלישי ירוץ ב-$o(|E|)$, שכן חסם עליון ממש של מס׳ הגשרים הוא מס׳ הקשתות בגרף.

סה״כ: $O(|E|+|V|)$.

(2)

(א)

יהי v צמת המשתתף בשני רכיבי דו-קשירות שונים C1,C2 בגרף G. נניח בשלילה כי v אינו קודקוד מנתק בגרף, אזי ניתוקו של v שיגרור ניתוק כל הקשתות המחוברות אליו לא ינתק את שני רכיבי דו הקשירות C1,C2, כלומר קיימת קשת כלשהי שעדיין מחברת בין שני רכיבי דו הקשירות ← C1,C2 שייכים לאותו רכיב דו קשירות, כלומר אינם שני רכיבי דו-קשירות שונים, וזו בסתירה להנחה ← v קודקוד מנתק בגרף.

(ב)

הוכחת נכונות האלגוריתם:

נניח v קודקוד מנתק ויש לו בן u, ולשם נוחות נניח שכל צאצאיו של u אינם קודקודים מנתקים.

תחילה נבחין בין שני מקרים: u יכול להיות גם קודקוד מנתק אם $low(u)>d(v)$, או לא להיות קודקוד מנתק אם $low(u)=d(v)$ – במקרה הראשון אין קשת אחורית מ-u אל v ולכן אין קשת אחורית מאף צאצא של u אל v, ולכן אם ננתק את u אז לא נוכל להגיע אל v מאף צאצא של u, כלומר v לא יהיה שייך לרכיב דו קשירות ש-u שייך אליו. במקרה השני קיימת קשת אחורית מ-u אל v, ולכן גם ניתוקו של u לא תנתק את v מצאצאי u, ולכן v יהיה באותו רכיב דו קשירות בו u נמצא.

נסתכל על המקרה בו u הוא גם קודקוד מנתק. בסוף האלגוריתם, כיוון ש-u הוא גם קודקוד מנתק נקבל שני עותקים של u: אחד כחלק מהקשת (v,u) העומדת לבדה, והשני כחלק מבלוק המתחיל מ-u. הקשת (v,u) היא רכיב דו קשירות –

טרוויאלי; הבלוק השני הוא רכיב דו קשירות כיוון שאין בו קודקודים מנתקים – לכל קודקוד שננתק, עדיין נוכל להגיע מכל קודקוד שנותר אל כל קודקוד אחר ← קיבלנו חלוקה של רכיבי דו קשירות.

נסתכל על המקרה בו u הוא לא קודקוד מנתק. בסוף האלגוריתם, נקבל בלוק המתחיל מ-v ואין בו קודקודים מנתקים: גם אם ננתק את u, עדיין נוכל להגיע אל v מכל קודקוד אחר, ובכלל – לכל קודקוד שננתק, עדיין יהיה מסלול מכל קודקוד אל כל קודקוד אחר שנותר ← קיבלנו חלוקה של רכיבי דו קשירות.

בכל מקרה, נראה כי קיבלנו חלוקה של רכיבי דו קשירות (גם אם בני שני צמתים בלבד), ולכן האלגוריתם נכון.

(3)

להלן אלגוריתם למציאת גשרים בגרף לא מכוון:

- נריץ את אלגוריתם מציאת קודקודים מנתקים ונסמן את כל הקודקודים המנתקים.
- נעבור על רשימת כל הקשתות, ונחזיר את כל הקשתות המחברות בין שני קודקודים המסומנים כקודקודים מנתקים.

הוכחת נכונות:

- השלב הראשון פשוט מריץ את אלגוריתם מציאת קודקודים מנתקים.
- נסתכל על קשת (u,v) בה שני הקודקודים מסומנים כקודקודים מנתקים: לפי 2(ב), ניתן לקבל חלוקה של כל רכיבי הדו קשירות בגרף, ואם (u,v) היא קשת המחברת בין שני קודקודים מנתקים, היא תהיה רכיב דו קשירות בפני עצמה, ומכאן שגם u וגם v יהיו חלק משני רכיבי דו קשירות שונים. מכאן, הקשת (u,v) מחברת בין שני רכיבי דו קשירות שונים, וניתוקה תביא לניתוק שני רכיבים אלה כך שהגרף לא יהיה קשיר ← (u,v) היא גשר.
- אם (u,v) לא מקיימת את התנאי, אז:
  - או שגם u וגם v לא קודקודים מנתקים, ולכן ניתוק u שיביא לניתוק (u,v) או ניתוק v שיביא לניתוק (u,v) לא ינתק את שאר הקודקודים ברכיב הדו קשירות אליו משתייכים – כלומר הסרת קשת (u,v) לא תנתק את הגרף.
  - או שרק אחד מהם קודקוד מנתק, נגיד u, ואז הוא חלק מרכיב דו קשירות ש-(u,v) חלק ממנו, ולכן ניתוק קשת (u,v) לא תנתק את הגרף.

סיבוכיות זמן ריצה:

- הרצת אלגוריתם למציאת קודקודים מנתקים: $O(|E|+|V|)$.
- בדיקת כל הקשתות: $O(|E|)$.

סה"כ: $O(|E|+|V|)$.

(4)

להלן תיאור אלגוריתם למציאת כל הקודקודים בגרף מכוון מהם יש מסלול לכל שאר הקודקודים האחרים בגרף:

- נבנה גרף רק"חים המתאים ל-G, נסמנו 'G (ע"פ האלגוריתם מהשיעור) שקודקודיו ...C1,C2.
- נבצע מיון טופולוגי על 'G ע"י הרצת DFS ונשמור את המיון ברשימה L.
- נריץ DFS על ראש הרשימה L (ביחס לגרף G) ונבדוק כמה עצים יש ביער ה-DFS: אם יש אחד בדיוק, נחזיר את כל הקודקודים מ-V (בגרף G) הנמצאים ברק"ח C1 שבגרף 'G. אם יש יותר מאחד – נחזיר רשימה ריקה.

הוכחת נכונות:

- נכונות השלב הראשון נובעת מההוכחה בכיתה.

- ע״י הרצת מיון טופולוגי, ראש הרשימה L יהיה הרק״ח היחיד הפוטנציאלי שכל קודקודיו מועמדים להיות אלה שמהם מסלול לכל קודקוד ב-G. זאת מכיוון שערך ה-f() שלו הוא הגבוה ביותר, כלומר הוא הקודקוד שבין תחילת בדיקתו עד סופה עברנו הכי הרבה שלבים – כלומר בדקנו הכי הרבה קודקודים.
- בדיקת יער ה-DFS שהרצנו על C1 ב-G': אם קיבלנו עץ יחיד, משמע ששורשו הוא C1 וניתן להגיע ממנו אל כל קודקוד אחר ב-G'. אם נסתכל על G, כיוון ש-G' הוא גרף רק״חים, המשמעות היא שמכל קודקוד ב-C1 ניתן להגיע לכל קודקוד אחר ב-...C1,C2, כלומר לכל קודקוד בגרף G. אם קיים עוד עץ, אז קיימים בו רק״חים (כלומר קודקודים) שלא ניתן להגיע אליהם מ-C1, אחרת הם היו בעץ ששורשו C1, ולכן המועמדים היחידים לענות על התנאי נפסלו, ולא קיימים קודקודים מהם מסלולים לכל קודקודי הגרף.

סיבוכיות זמן ריצה:

- השלב הראשון רץ ב-$O(|E|+|V|)$, כפי שהוכח בשיעור.
- השלב השני גם רץ ב-$O(|E|+|V|)$, כיוון שאנו מריצים DFS.
- בשלב האחרון שוב מריצים DFS ולאחריו עוברים על יער ה-DFS (מצביעי הפאי של כל קודקודי V), רץ ב-$O(|E|+|V|)$.

סה״כ: $O(|E|+|V|)$.

(5)

להלן אלגוריתם לבדיקת חצי קשירות בחוזקה לגרף מכוון $G=\{E, V\}$:

- נבנה גרף רק״חים המתאים ל-G, נסמנו G' (ע״פ האלגוריתם מהשיעור) שקודקודיו ...C1,C2.
- נבצע מיון טופולוגי על G' ע״י הרצת DFS ונשמור את המיון ברשימה L.
- נעבור על הרשימה L מקודקוד ההתחלה (ב-G') ונבדוק האם ישנה קשת למעבר ב-G' מקודקוד לקודקוד לפי סדר הופעתם ב-L. אם יש מעברים עד הקודקוד האחרוןף נחזיר T, אחרת נחזיר F.

הוכחת נכונות:

- נכונות השלב הראשון נובעת מההוכחה בכיתה.
- לאחר ביצוע מיון טופולוגי, אם קיים מסלול העובר דרך כל קודקודי המיון הטופולוגי של G' אזי מסלול זה מציג קשרי מעבר: מכל הקודקודים ברק״ח הראשון ב-L ניתן להמשיך לכל הקודקודים ברק״ח השני ב-L, ומהם לכל הקודקודים ברק״ח השלישי וכן הלאה – כלומר לכל קודקוד בגרף המקורי G ניתן להראות את:
  - כל הקודקודים שמהם ניתן להגיע אליו – אלו כל הקודקודים ברק״חים הקודמים לרק״ח בו נמצא לפי מסלול המיון הטופולוגי שמצאנו.
  - כל הקודקודים שאליהם ניתן להגיע ממנו – אלו כל הקודקודים ברק״חים הבאים לרק״ח בו נמצא לפי מסלול המיון הטופולוגי שמצאנו.
  - כל הקודקודים שגם ניתן להגיע אליהם ממנו וגם ניתן להגיע מהם אליו – אלו כל הקודקודים שאיתו באותו רק״ח (מהגדרת רק״ח).

ומכאן שלכל $u,v\in V$ קיים מסלול מ-u אל v ו/או מסלול מ-v אל u 🡸 הגרף חצי קשיר בחוזקה.

נשים לב במהלך בדיקת קשירות הקודקודים לפי הסדר ב-L, כי אם מצאנו שני קודקודים בסדר זה שאין מהראשון מביניהם קשת לשני מביניהם, אז בהכרח קיימים קודקודים שאין ביניהם מסלול, כיוון שכל הקשתות לפי סדר L הולכת <u>רק בכיוון אחד</u> מהגדרת המיון הטופולוגי, כך שאם u ו-v הם הקודקודים ב-L שביניהם אין

קשת (u הראשון מביניהם ב-L), אזי לא קיימות קשתות אחרי v שיביאו אותנו אל לפני u, ולכן u בהכרח לא יהיה מקושר עם אף קודקוד מ-v והלאה לפי סדר L.

סיבוכיות זמן ריצה:

- השלב הראשון רץ ב-$O(|E|+|V|)$, כפי שהוכח בשיעור.
- השלב השני גם רץ ב-$O(|E|+|V|)$, כיוון שאנו מריצים DFS.
- בשלב האחרון עוברים על כל קשתות G' – $O(|E|)$.
- סה״כ: $O(|E|+|V|)$.

(6)

להלן תיאור אלגוריתם למציאת עץ פורש T בגרף לא מכוון וקשיר $G=\{V, E\}$, כך שסכום מכפלות דרגות הקודקודים ב-T (מספר הבנים של הקודקוד) במשקל הקודקודים (לפי $w:V\rightarrow R$) הוא מינימלי:

- נגדיר פונקציית משקל חדשה $f:E\rightarrow R$ המוגדרת כך: לכל $e=(u,v)\in E$, $f(e)=w(u)+w(v)$.
- נפעיל כעת אלגוריתם מוכר סטנדרטי למציאת MST, למשל אלגוריתם kruskal על הגרף G עם הפונקציה f שהוגדרה לעיל. נחזיר את התוצאה.

הוכחת נכונות:

- f מוגדרת היטב שכן היא פשוט סכום של הפעלת הפונ׳ w על שני קודקודים.
- נשים לב כי לכל עץ, בפרט עפ״מ, יתקיים השוויון הבא:

$$f(T) = \sum f(u,v) = \sum[w(u) + w(v)] = \sum d_T(v)\cdot w(v)$$

כאשר הסכום הראשון והשני הם על כל $(u,v)\in E$ והשלישי הוא על כל $v\in V$: סכימה של כל $w(u)+w(v)$ למעשה דואגת שכל משקל קודקוד יוכפל בכמות הקשתות בו מופיע – כלומר דרגתו לפי T.

לפיכך, כיוון שהסכומים הנ״ל שקולים, אזי $\sum d_T(v)\cdot w(v)$ מינימלי יהיה כאשר $f(T)$ מינימלי, וזה יקרה כאשר T עפ״מ לפי פונ׳ משקל f כמוגדר לעיל.

סיבוכיות:

- מעבר על כל הקשתות לחישוב משקלן לפי f: $O(|E|)$.
- אלגוריתם מציאת עפ״מ kruskal: $O(|E|\cdot\log(|V|))$.

סה״כ: $O(|E|\cdot\log(|V|))$.

(7)

להלן אלגוריתם לבדיקה האם קיים בגרף קשיר ולא מכוון $G=\{V, E\}$ עפ״מ ביחד ל-$w:V\rightarrow R$ המכיל את קשת $(u,v)\in E$:

- ניצור עץ T ריק עם רשימת קודקודים A ריקה.
- נעבור על כל הקשתות ב-E ולכל קשת $(a,b)\in E$ המקיימת $w[(a,b)]\leq w[(u,v)]$ נוסיף את a,b ל-A ונוסיף את (a,b) ל-T (ע״י union).
- נבדוק האם find(u)=find(v): אם כן נחזיר F, אחרת נחזיר T.

הוכחת נכונות:

- נניח $find(u)=find(v)$: כאשר אנו בונים עפ״מ ע״פ אלגוריתם בניית עפ״מ כלשהו, אם אנו מגיעים בדרך ל-(u,v) ומתקיים $find(u)=find(v)$, אזי מצאנו כבר קודם קשתות קלות יותר המקשרות את u ואת v לעפ״מ. שלב זה מקביל ל-T מהאלגוריתם, אך בו התנאי מחמיר אף יותר : T יכיל את הקשתות שהעפ״מ יכיל עד היפגשו עם (u,v) בנוסף לעוד קשתות (שאינן משנות לבדיקה). לכן כמו שבשלב זה בעפ״מ (u,v) לא תתווסף אליו, קל וחומר שלא תתווסף ל-T. לפיכך אם $find(u)=find(v)$ אזי (u,v) לא שייכת לעפ״מ.
- נניח $find(u)\neq find(v)$: כאשר בונים עפ״מ, אם נגיע ל-(u,v) ויתקיים $find(u)\neq find(v)$ אזי u ו-v שייכים כל אחד לרכיב קשירות אחר, והקשת (u,v) היא קשת קלה בין שני רכיבי קשירות אלו, ולכן (u,v) תתווסף לעפ״מ. במקרה שלנו, אם (u,v) לא שייכת לעפ״מ, אז u,v שייכים כבר לאותו רכיב קשירות, אך זו תהיה סתירה לבדיקה ש-$find(u)\neq find(v)$. לכן (u,v) תהיה שייכת לעפ״מ.

סיבוכיות זמן ריצה:

הסיבוכיות המתבקשת מתקבלת ממעבר לכל היותר על כל הקשתות וכל הקודקודים תוך ביצוע פעולות בזמן קבוע על כל אחד : $O(|V|+|E|)$.

(8)

נתון גרף G עם פונקציית משקל w. הוכחה דומה להוכחת שוויון $a_i=b_i$ עבור שני עפ״מ שהוצגה בהרצאה.

נניח כי הטענה אינה נכונה. נניח כי האינדקס הראשון עבורו $a_i > b_i$ הוא i. נגדיר את הפונקציה הבאה :

$$f(x):=\begin{cases} x, & x\le b_i \\ x+\Delta, & x> b_i \end{cases}$$

כאשר : $\Delta= w(T_2)-w(T_1)+1$.

f מונוטונית לא יורדת, ולכן לפי טענה שהוכחה בהרצאה, T_1 המוגדר בשינוי המשקלות לפי הפונקציה $w'=f\circ w$ הוא גם עפ״מ. נסתכל כעת על המשקל החדש של העצים :

$$w'(T_1) = w(a_1) + w(a_2) +\ldots + w(a_{i-1}) + [w(a_i)+\Delta] + \ldots + [w(a_{|V|-1})+\Delta] = w(T_1)+(|V|-i)\Delta$$

$$w'(T_2) = w(b_1) + w(b_2) +\ldots + w(b_{i-1}) + w(b_i) + \underbrace{w(b_{i+1})\underline{+\Delta} + \ldots + w(b_{|V|-1})\underline{+\Delta}}_{\text{תוספת } \Delta \text{ ל-} w(b_j) \text{ רק במידה ו-} w(b_j)>w(b_i)} \le w(T_2)+(|V|-i-1)\Delta =$$

$$= w(T_2)+(|V|-i)\Delta - \Delta = \cancel{w(T_2)}+(|V|-i)\Delta - \cancel{w(T_2)} + w(T_1) -1 = w(T_1)+(|V|-i)\Delta-1 < \mathbf{w(T_1)+(|V|-i)\Delta = w'(T_1)}$$

← קיבלנו סתירה לכך ש-T1 הוא עפ״מ ביחס ל-'w כיוון שיש עץ עם משקל נמוך משלו, ומכאן הטענה נכונה.