אלגוריתמים / תרגיל 4#

אריאל סטולרמן
קבוצה 02

(1)

יהי $G = \{V, E\}$ גרף מכוון, $c: V \times V \to \mathbb{N}$ פונקצית קיבול ו-$b: V \times V \to \mathbb{N}$ פונקצית חסמים תחתונים לזרימה, ותהי f' זרימה חוקית ברשת המקיימת $\forall e \in E: b(e) \le f'(e) \le c(e)$. להלן השינויים באלגי *Ford-Fulkerson* כדי להתאימו למציאת זרימה מקסימלית תחת תנאים אלו:

- ראשית, מתקיים כי $\forall e \in E: b(e) \le c(e)$, אחרת לא קיימת זרימה חוקית ברשת.
- שלב האתחול - נאתחל את ערכי f ההתחלתיים להיות ערכי f', הזרימה הנתונה, לכל קשתות הגרף.
- בשלב בניית רשת שיורית G_f, עדכון ערך ה-c_f לכל ה**אנטי**-קשתות יעשה באופן הבא:

$$\forall (u, v) \in E: c_f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) \leftarrow c(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{b}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

נכונות:

ראשית, אתחול f לערכי f' חוקי שכן נתון כי f' זרימה חוקית, ומקיימת את החסמים התחתונים והעליונים (ערכי *b,c*) לכל קשתות הגרף.

שנית, הנקודה היחידה בה ערך זרימה $f(e)$ יכול לקבל ערכים קטנים מ-$b(e)$ (באלגוריתם המקורי) היא כאשר מחפשים ברשת השיורית מסלול p משפר, העלול לעבור באנטי קשתות. במקרה כזה יתכן מצב בו זרימה התחלתית $f(e) = f'(e)$ בקשת e תקבל ערך נמוך יותר לאחר עדכון ערכי f לפי p. לכן, כדי למנוע אפשרות של הורדת זרימה בקשת e מתחת לערך $b(e)$, נדאג שהאנטי-קשת המתאימה לה תכנס לרשת השיורית רק לאחר שהפחתנו ממנה את $b(e)$, כלומר אם היא תיכנס, ותשתתף במסלול משפר p, השימוש בה לא יוריד את $f(e)$ אל מתחת ל-$b(e)$.

סיבוכיות:

סיבוכיות האלגוריתם לא משתנה ונשארת כמו המקורי: $O(|E|^2 \cdot |V|)$ (לגרסת *Edmonds-Karp*).

(2)

משפט מנגר:

יהי $G = \{V, E\}$ גרף, $s, t \in V$, $(s, t) \notin E$. אזי:

$$max\{i \mid \text{כל } p_i \text{ מסלול בגרף מ } s \text{ ל } t \text{, זרים בקודקודים } p_i\}$$
$$= min\{k \mid \text{לאחר הורדת } k \text{ קודקודים אין מסלול בין } s \text{ ל } t\}$$

הוכחה:

אם G לא מכוון, נהפוך אותו למכוון ע"י החלפת כל $(u, v) \in E$ ל-$(v, u), (u, v)$ קשתות מכוונות אנטי מקבילות, מהלך זה לא פוגע במספר המסלולים הזרים <u>בקשתות</u>.

נגדיר פונקצית קיבול c המחזירה 1 לכל קשתות הגרף ו-0 אחרת. מוצאים זרימה מקסימלית (למשל ע"י *Ford-Fulkerson*), וזרימה זו שווה למספר המסלולים הזרים בקשתות בין s ל-t.

נתייחס לדרגות כניסה ודרגות יציאה של קודקוד כמספר הקשתות התורמות 1 לזרימה הנכנסות אליו או היוצאות ממנו (קשתות שתעבור בהן זרימה 0 לא ייחשבו). לפי התייחסות זו, כל זרימה שעוברת דרך כל קודקוד (כל מסלול העובר דרכו) מוסיפה 1 לדרגת הכניסה ו-1 לדרגת היציאה שלו. נסתכל על כל הקודקודים שדרגת הכניסה (= דרגת היציאה) שלהם גדולה ממש מ-1, ובאופן אקראי נסיר קשתות הנכנסות והיוצאות ממנו <u>מתוך הקשתות התורמות לדרגתו</u> בלבד, עד שדרגת

הכניסה והיציאה שלו תהיה בדיוק 1. נסמן את הגרף החדש שהתקבל ב-G', ומס׳ המסלולים הזרים בקודקודים ב-G' זהה לזה ב-G.

לפי משפט *min-cut max-flow*, החיתוך המינימלי של הקשתות ב-G' שווה לזרימה המקסימלית ב-G', כאשר היא שווה למספר המקסימלי של מסלולים הזרים בקשתות ב-G' (באותו אופן כמו ב-G). כעת, כיוון שכל קודקוד ב-G' בעל דרגת כניסה ויציאה 1 בלבד, המספר המקסימלי הזה של המסלולים הזרים בקשתות שווה למספר המקסימלי של המסלולים הזרים בקודקודים ב-G', וכאמור זה **שווה למספר המקסימלי של מסלולים הזרים בקודקודים ב-G**. נשים לב כי אותו חיתוך מינימלי של קשתות ב-G' הוא המספר המינימלי של קשתות שצריך לנתק כדי לנתק את s מ-t, אך כיוון שדרגות כל הקודקודים הן 1, ניתן לבחור לכל קשת מהחיתוך המינימלי את הקודקוד השמאלי שלה (זה הקרוב יותר ל-s במסלול העובר דרכו מ-s ל-t; ניתן גם לבחור הפוך) ולטעון כי ניתוק כל הקודקודים שבחרנו גם יביא לניתוק כל המסלולים מ-s ל-t, והרי המספר המינימלי הזה = המספר המינימלי של הקשתות ב-*min cut*. לכן, זהו המספר המינימלי של קודקודים שיש לנתק כדי לנתק את s מ-t ב-G', וזה **שווה למספר המינימלי של קודקודים שיש לנתק כדי לנתק את s מ-t ב-G**.

לפיכך: המקסימום של מספר המסלולים הזרים בקודקודים ב-G שווה למינימום הקודקודים שיש לנתק ב-G כדי לנתק את כל המסלולים בין s ל-t.

נכונות:

- הפיכת הגרף למכוון כפי שמתואר אינה פוגעת במספר המסלולים הזרים בקשתות, כפי שהוכח בתרגול.
- הזרימה המקסימלית בגרף שווה למספר המסלולים הזרים בקשתות בין s ל-t – גם כן הוכח בתרגול.
- מספר המסלולים הזרים בקודקודים ב-G' שווה למספר המסלולים הזרים בקודקודים ב-G – במעבר מ-G' ל-G הורדנו קשתות ואמנם פגענו במספר המסלולים הזרים בקשתות ב-G, אך כיוון שכל קודקוד המשתתף בזרימה יכול להשתתף במסלול אחד בלבד מתוך המסלולים הזרים בקודקודים, ולכל הקודקודים השארנו מסלול אחד בדיוק העובר דרכו, אזי לא פגענו במספר המסלולים הזרים בקודקודים ב-G, והוא זהה לזה ב-G'.
- מספר המסלולים הזרים בקשתות ב-G' שווה למספר המסלולים הזרים בקודקודים ב-G' – נניח בשלילה כי זה לא נכון. לפיכך קיים מסלול בין s ל-t כך ש: מספר המסלולים הזרים בקשתות גדול ממספר המסלולים הזרים בקודקודים, או להיפך. נניח תחילה כי מספר המסלולים הזרים בקשתות גדול יותר. כל הקודקודים משתתפים בזרימה, ולכן אם נוסיף מסלול זר בקשתות, הוא יעבור דרך קודקודים שכבר יש דרכן זרימה, ודרגות הכניסה והיציאה של אותן קודקודים יהיה גדול מ-1, בסתירה לבניית G'. עבור מספר מסלולים זרים בקודקודים גדול יותר ההוכחה מיידית. לפיכך, מס׳ מסלולים זרים בקשתות ב-G' = מסלולים מסלולים זרים בקודקודים ב-G'.
- המספר המינימלי של קשתות שיש לנתק ב-G' כדי לנתק את s מ-t שווה למספר המינימלי של קודקודים שיש לנתק כדי לנתק את s מ-t – נובע ישירות מהסעיף הקודם: לכל קשת במסלול כלשהו ניתן לבחור קודקוד אותו ננתק (במקום את הקשת), וכך ננתק את אותו מסלול.
- אותו מספר מינימלי של קודקודים שיש לנתק ב-G' הוא זה שיש לנתק ב-G – כל המסלולים ב-G, גם אלו שאינם כבר ב-G', עוברים דרך קודקודים הנמצאים ב-G' (לא קיימים קודקודים המשתתפים בזרימה ב-G ולא ב-G'). כך, אותו ניתוק קודקודים מ-G' ב-G ינתק בהכרח את כל המסלולים בין s ל-t ב-G.

סיבוכיות:

סיבוכיות הפתרון היא כמהלך הארוך ביותר, והוא מציאת זרימה מקסימלית: $O(|E|^2 \cdot |V|)$.

(3)

פתרון:

נבנה גרף מכוון $G = \{V, E\}$ באופן הבא:

לכל אחת מ-n המשימות נתאים קודקוד ב-V, נסמנו $\forall 1 \le i \le n: u_i$, ולכל אחת מ-$m$ המכונות נתאים קודקוד ב-V, נסמנו $\forall 1 \le j \le m: v_j$. כמו כן יהיו שני קודקודים נוספים $s, t \in V$.

את קבוצת הקשתות E נבנה כך:

- $\forall 1 \le i \le n: (s, u_i) \in E$
- $\forall 1 \le j \le m: (v_j, t) \in E$
- $\forall 1 \le i \le n: \{(u_i, v_j) | \, v_j \in L(i)\} \subset E$

כמו כן נגדיר פונקצית קיבול c על קשתות הגרף: כל הקשתות מהצורה $\forall 1 \le j \le m: c(v_j, t) = a_j$, וכל שאר קשתות הגרף יקבלו קיבול של 1.

כעת נריץ אלגוריתם למציאת זרימה מקסימלית, ונסמנה $|f|$. נחזיר T אמ"מ $|f| = n$.

נכונות:

נניח כי ניתן לקיים את כל המשימות, אזי לכל u_i משימה קיימת מכונה v_j כלשהי המבצעת אותה, ולכן כל 1 היוצא מ-s ועובר דרך u_i, עובר דרך v_j ומגיע ל-t ≡ המשימה מתבצעת. כיוון שמ-s יוצאים סה"כ n, אזי הזרימה שתגיע ל-t, היא $|f|$, היא בדיוק n.

נניח כי לא ניתן לקיים את כל המשימות, אזי קיימת לפחות משימה אחת u_i שאף מכונה $\forall 1 \le j \le m: v_j$ לא יכולה לבצע בשל מגבלות המערכת הספק המכונה). לכן, קיים לפחות 1 אחד היוצא מ-s ועובר דרך u_i, שלכל $v_j \in L(i)$ אליו מגיע, v_j לא מבצעת את המשימה ולכן לא מעבירה את ה-1 הזה הלאה ל-t. כיוון שיוצאים מ-s בדיוק n (משימות), בודאי שמתקיים כי $|f| < n$.

סיבוכיות:

בניית הגרף ובדיקת זרימה מקסימלית, סה"כ: $O(|E|^2 \cdot |V|)$.

(4)

נבנה גרף מכוון $G = \{V, E\}$ באופן הבא:

לכל בן נתאים קודקוד $\forall 1 \le i \le n: u_i$ ולכל בת נתאים קודקוד $\forall 1 \le j \le n: v_j$, וכמו כן שני קודקודים נוספים $s, t, \in V$. לכל קודקוד u המייצג אדם נסמן כ- $L(u)$ את קבוצת האנשים אותו מכיר ($\forall u \in V \backslash \{s, t\}: |L(u)| = k > 0$).

את קשתות הגרף נבנה כך: $\forall 1 \le i \le n: \{(u, v) | \, v \in L(u)\} = E$

(א)

נובע ממשפט *Hall*:

יהי G גרף דו-צדדי, $V = X \uplus Y$, $E \subset X \times Y$, $|Y| = |X|$. לכל $A \subset X$ נסמן ב-$\Gamma(A)$ את קבוצת שכני כל $u \in A$ הנמצאים ב-Y. מתקיים: ל-G זיווג מושלם (בגודל $|X| = |Y|$) $\Leftrightarrow$ לכל $A \subset X$ מתקיים: $|A| \le |\Gamma(A)|$.

הגרף הנתון הינו גרף דו צדדי בו $V = X \uplus Y = \{u_i | 1 \le i \le n\} \uplus \{v_i | 1 \le i \le n\}$, ולכל $A \subset X$ מתקיים $|A| \le |\Gamma(A)|$:
נניח בשלילה כי קיים $A \subset X$ כך ש-$|\Gamma(A)| < |A|$. כיוון שכל בן מכיר k בנות בדיוק, לכל בן ב-A נוסיף k שכנות ל-$\Gamma(A)$ לכל היותר, ו-k שכנות בדיוק אם הוא הראשון שמצטרף ל-A. אם כן, לכל המצבים בהם $|A| \le k$ לא יכולה להתקיים הנחת השלילה, כיוון שברור כי $\Gamma(A) \ge k$. אם כן נסתכל על $|A| > k$, ונוכיח באינדוקציה:
נסתכל על המקרה הפשוט בו $|A| = k + 1$, וכיוון ש-$\Gamma(A) \ge k$, תחת הנחת השלילה יתקיים כי $\Gamma(A) = k < |A| = k + 1$. אך אם זה היה מתקיים, כיוון שכל בן ב-A מכיר כל אחת מ-k הבנות ב-$\Gamma(A)$, אז היינו מקבלים כי כל בת בקבוצת הבנות $\Gamma(A)$ מכירה *k+1* בנים בסתירה לנתונים.
נניח נכונות הטענה המקורית עבור $|A| = j (> k + 1)$, נוכיח נכונות עבור $|A| = j + 1$. לפי הנחה, עבור $|A| = j$ מתקיים כי $|\Gamma(A)| \ge j$. במקרה בו $|\Gamma(A)| = j$ מתקיים כי לכל בת ב-$\Gamma(A)$ כל הבנים שהיא מכירה נמצאים ב-A, וזאת כיוון שעלינו "לחלק" $k \cdot j$ היכרויות על פני j בנות נתונות ב-$\Gamma(A)$, וכיוון שכל בת מכירה בדיוק k בנים, נקבל כי כל בת תקבל בדיוק k קשתות (= k היכרויות). אם לא היינו מחלקים כך את ההיכרויות, היתה מתקבלת בת עם יותר מ-k היכרויות (קשתות המחוברות אליה מבנים ב-A), בסתירה לנתון.
לפיכך, כל הבנות ב-$\Gamma(A)$ מכירות את כל הבנים ב-A, ולכן הוספה של בן נוסף בהכרח תוסיף k בנות חדשות ל-$\Gamma(A)$ (לא יתכן שאלו יהיו מתוך הבנות הנמצאות כבר ב-$\Gamma(A)$), ולכן עבור $|A| = j + 1$ יתקיים $|\Gamma(A)| = j + k \ge j + 1$. במקרה בו $|\Gamma(A)| \ge j + 1 \Leftrightarrow |\Gamma(A)| > j$, ברור כי הוספת בן אחד ל-A תגרור $|\Gamma(A)| \ge j + 1 = |A|$.
לפיכך מתקיים כי $\forall A \subset X: |A| \le |\Gamma(A)|$, ולכן לפי משפט *Hall* קיים זיווג מושלם בין בנים ב-X לבנות ב-Y בגודל n.

(ב)

לכל $k > 0$ ניתן לבצע k פעמים את הפעולות הבאות:

- נמצא זיווג מקסימלי, ניתן לעשות זאת לפי ההוכחה בסעיף הקודם.
- לאחר מציאת הזיווג נסיר את כל הקשתות המייצגות את הזיווג, ונקבל כי לכל u כעת $|L(u)| = k - 1$.
- נחזור על ההוכחה עד ש-k יתאפס.

כיוון שאחרי כל מציאת זיווג אנו מסירים את הקשתות המייצגות את אותו זיווג, בכל שלב נקבל זיווג אחר. לכל k בדרך ההוכחה מסתמכת על סעיף א'.

לפיכך, ניתן למצוא k זיווגים שונים של רקדנים מתוך נתוני השאלה.

(5)

תהי $G = \{V, E\}$ עם מקור s ובור t וקיבולים שלמים על הקשתות רשת זרימה. להלן אלגוריתם לעדכון הזרימה המקסימלית כאשר מעלים את קיבול אחת הקשתות $(u, v) \in E$ ב-1:

נריץ איטרציה אחת של *Ford-Fulkerson*.

נכונות:

כאשר מעלים את קיבול אחת הקשתות ב-1, הזרימה המקסימלית יכולה או לעלות ב-1 או להישאר בערכה הקודם. לפיכך, כאשר נריץ איטרציה אחת של *Ford-Fulkerson*, או שנמצא מסלול משפר (ב-1), או לא. אם נמצא מסלול משפר, הזרימה המקסימלית מתעדכנת, ולא יהיו עדכונים נוספים. אם לא נמצא מסלול משפר, כלום לא משתנה.

סיבוכיות:

הרצה של איטרציה בודדת של האלגוריתם היא לינארית: $O(|E|)$.

(6)

תחת נתונים דומים של השאלה הקודמת, מורידים את קיבול אחת הקשתות $(u,v)\in E$ ב-1:

נבדוק את הפרש $c(u,v)-f(u,v)$ תחת הקיבול הישן. אם הפרש זה היה גדול מ-0, נסיים. אחרת נסתכל על הרשת השיורית G_f המתאימה ל-G טרם שינוי הקיבול: נמצא מסלול מ-t ל-s העובר דרך (v,u) (כלומר דרך האנטי קשת של (u,v)), ונפחית את ערך הזרימה בכל אחת מקשתות מסלול זה ב-1. כעת נריץ איטרציה בודדת של *Ford-Fulkerson*.

נכונות:

אם ההפרש בין קיבול (u,v) לזרימה בה גדול מ-0, הרי שהפחתת הקיבול לא תשפיע על הזרימה בקשת ולפיכך גם לא על הזרימה המקסימלית. אם לא, אז ברור כי שינוי הקיבול משפיע על הזרימה המקסימלית.

במצב זה, אם נסתכל על הרשת השיורית G_f, ברור שקיים בה מסלול (דרך אנטי קשתות) מ-t ל-s העובר ב-(v,u), ולפיכך נוכל "להחזיר" דרכו זרימה בגודל 1 מ-t ל-s. כיוון שנבחר מסלול העובר דרך (v,u), אז בעדכון הרשת השיורית, כל האנטי קשתות באותו מסלול יקבלו ערך 1+, וכל הקשתות באותו מסלול יקבלו ערך 1-, ובין היתר הקשת (u,v), ולכן כעת הזרימה העוברת דרכה בודאות מתאימה לקיבול החדש.

כעת כל שנותר לעשות הוא להריץ איטרציה בודדת של *Ford-Fulkerson*, כיוון שיש לבדוק האם אותה זרימה של 1 שהחזרנו דרך (v,u) יכולה לעבור דרך מסלול אחר, ולכן עלינו לנסות למצוא מסלול משפר, בדומה לשאלה הקודמת (לכן מספיקה איטרציה אחת).

סיבוכיות:

כל הפעולות הן לינאריות בלבד ולכן $O(|E|)$.