

48	מספר מחברת:
----	-------------

י"א תמוז, תשס"ט

3 يولי, 2009

בחינה בסיבוכיות

מוצרים: מולי ספרה, עודד רגב
מתרגלים: עידן בן אליעזר, ישעיהו

משך הבחינה: שלוש שעות.
השימוש בחומר עזר או במחשבון אסור.

פרק הראשון 8 שאלות.
לכל שאלה מוצעות של תשובות אפשריות, ומבחן עליהם לבחור בתשובה הנכונה.
את התשובות יש לסמן **בתשובון המצורף** – תשובה אחת לכל שאלה.
בפרק זה, תשובה נכונהmezachah ב-6 נקודות.

פרק השני 3 שאלות ובכל שאלה שני סעיפים.
יש להסביר עליהם במדויק המקרה לכך בטופס זה בלבד. מחברת הבחינה משתמש לטיווח בלבד ולא תיבדק.
אפשר להסתמך על **נכונות סעיפים קודמים**, גם אם לא השבטים עליהם.
בפרק זה, ארבעת הסעיפים הטוביים ביותר ייחשבו 10 נקודות כל אחד, ושני הנוטרים 6 נקודות כל אחד.

הקפידו לציין מספר מחברת ומספר ת.ז. בראש כל עמוד ובתשובון המצורף!

ההגשה!

פרק 1
פרק 2, שאלה 1
פרק 2, שאלה 2
פרק 2, שאלה 3
ציוויל

46
3 9
10 10
9 10
92

מספר מחברת: 48

פרק ראשון

1. באיזו מחלוקת סיבוכיות בין המחלוקות הבאות מוגלת $\text{NTIME}(n^{10})$ בהכרח?

- א. $\text{DTIME}\left(2^{(n^5)}\right)$
- ב. $\text{DTIME}\left(2^{(n^{20})}\right)$
- ג. $\text{NSPACE}(n^5)$
- ד. $\text{SPACE}(n^{20})$

(ה. יותר מושבה אחת נכונה.
 ו. אף תשובה אינה נכונה.)

2. נתון גרף מכoon חסר לולאות ($G = (V, E)$), איבר סופי V בגודל k , ותמורה (פרמוטציה) $\pi : V \rightarrow V$ לכל קשות π .
 הקשת (u, v) מספקת על ידי הצבה $\pi \rightarrow V \rightarrow A$ אם $\pi(u) = \pi(v) = A$. בוחרים באקראי הצבה π כך שלכל צומת ב- V נבחר ערך מהתפלגות אחידה על איברי V באופן בלתי- תלוי.

מהי תוחלת מספר הקשיות המספקות?

- א. 0
- ב. $\frac{1}{k} \cdot |E|$
- ג. $\frac{1}{k^2} \cdot |E|$
- ד. $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot |E|$
- ה. $\left(1 - \frac{1}{k}\right) \cdot |E|$
- ו. $|E|$

3. לאיזו מחלוקת קטנה ביותר ביחס להכליה שicity הבהה? (הניבו כי המחלוקות שונות)
 קלט: גרף לא מכoon G על n צמתים.

שאלה: האם בגרף G יש **בדיק** או 12 משולשים?
 (משולש הוא קליק בגודל 3, כלומר שלושה צמתים שונים שכל שניים מהם מחוברים בקשר.)

- א. L
- ב. NL
- ג. NP
- ד. coNP
- ה. $\Sigma_2^p \cap \Pi_2^p$
- ו. Σ_2^p

48

מספר מחברת :

4. נניח שגרסת ההבטחה של בעית הקבוצה הבלתי-תלויה הגדולה ביותר, $\text{Gap-IS}[\alpha, \beta]$, היא NP-קשה עבור הקבועים $1 < \alpha < \beta < 0$. נתונות ארבע טענות:

- I. בעית CISO בצמתים מינימלי (Min-VC) היא NP-קשה לקיורוב לכל פקטוֹר קטן מ- $\frac{\beta}{\alpha}$.
- II. בעית CISO בצמתים מינימלי (Min-VC) היא NP-קשה לקיורוב לכל פקטוֹר קטן מ- $\frac{1-\alpha}{1-\beta}$.
- III. בעית קליק מקסימלי (Max-Clique) היא NP-קשה לקיורוב לכל פקטוֹר קטן מ- $\frac{\beta}{\alpha}$.
- IV. בעית קליק מקסימלי (Max-Clique) היא NP-קשה לקיורוב לכל פקטוֹר קטן מ- $\frac{1-\alpha}{\beta-1}$.

אילו טענות נכונות בהכרח? (МОTOR להנich את משפט ה-PCP)

- א. I, IV
- ב. II, III
- ג. III, IV
- ד. I, II, IV
- ה. I, II, III
- ו. I, II, III, IV

5. לאיזו מחלוקת קטנה ביותר ביחס להכליה שיכת הבעיה הבאה? (הניחו כי כל המחלוקות שוונות)
קלט: גראף לא מכווֹן G על n צמתים.

שאלה: האם קיים ב- G מסלול פשוט באורך $\geq \frac{1}{4}$ וגם קבוצה בלתי-תלויה בגודל 4?

- ? ? ? ? ?
- א. L
 - ב. NL
 - ג. NP
 - ד. coNP
 - ה. PSPACE
 - ו. EXP

6. לאיזו מחלוקת קטנה ביותר ביחס להכליה שיכת הבעיה הבאה? (הניחו כי המחלוקות שוונות)
קלט: נוסחת 3CNF.

שאלה: האם קיימת השמה שאינה מספקת את הנוסחה?

- א. L
- ב. NL
- ג. NP
- ד. coNP
- ה. PSPACE
- ו. EXP

7. לאיזו מחלוקת קטנה ביותר ביחס להכללה שיצכת הבעיה הבאה? (הנימו כי המחלוקת שונות)
 קלט: (\exists, x, M) כאשר M היא מכונת טיורינג הסתברותית עם סרט אחד לקריאה ולכתיבה (עליו כתוב הקלט בתחלת החישוב) ו- x הוא קלט עבורה.

שאלה: האם המכונה M מחזירה 1 על הקלט x תוך צעדים בהסתברות 1 (על פני המטבעות האקראיים שmagirile המכונה)?

- א. L
- ב. NL
- ג. NP
- ד. coNP
- ה. BPP
- ו. PSPACE

8. לאיזו מחלוקת קטנה ביותר ביחס להכללה שיצכת הבעיה הבאה? (הנימו כי המחלוקת שונות)
 קלט: (\exists, x, M) כאשר M היא מכונת טיורינג דטרמיניסטית עם סרט אחד לקריאה ולכתיבה (עליו כתוב הקלט בתחלת החישוב) ו- x הוא קלט עבורה.

שאלה: האם M מחזירה 1 על הקלט x מבלי לעזוב את התאים הראשונים של הסרט?

- א. L
- ב. NL
- ג. NP
- ד. coNP
- ה. BPP
- ו. PSPACE

48

מספר מחברת:

פרק שני

$$E^2 = \bigcup_{c \geq 1} \text{DTIME}\left(2^{cn^2}\right) \quad E = \bigcup_{c \geq 1} \text{DTIME}\left(2^{cn}\right)$$

. $E^2 \subseteq \text{PSPACE}$ ו $E \subseteq \text{PSPACE}$

ב. קבעו האם הטענה הבאה נכונה, אינה נכון שcola לשאלה פתוחה, והוכחו קביעתכם.
טענה : $E = \text{PSPACE}$

טענה : $\text{E} = \text{PSPACE}$

רמז: האם $E = E^2$

מספר מחברת:

48

- .2. א. הוכחו כי לכל $0 < \epsilon$ גרסת ההבטחה של בעית הקבוצה הבלתי-תלויה $\left[\frac{1}{3}, \epsilon\right]$ Gap-IS $\left[\frac{7}{24} + \epsilon\right]$ היא NP-קשה.
 הערכה: בסעיף זה יש להגניח את משפט PCP-h.

48

מספר מחברת:

ב. נגידר את בעיית ההבטחה $\text{Gap-5-Coloring}[\alpha, \beta]$.קלט: גרף לא מכונן $(V, E) = G$ על n צמתים.YES: הגודל המרבי של קבוצת צמתים $V \subseteq U$ שתת-הגרף של G המושרחה עליו הוא 5-צבע הוא לפחות α .NO: הגודל המרבי של קבוצת צמתים $V \subseteq U$ שתת-הגרף של G המושרחה עליו הוא 5-צבע הוא לכל היותר α .חוכחו שams $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ Gap-5-Coloring $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right]$ היא NP-קשה או בעית כיסוי בצמתים מינימלי (Min-VC) היא NP-קשה לקירוב עם כל פקטור שקטן מ- $\frac{29}{28}$.הערות: תת-הגרף של G המושרחה על U הוא הגרף שקבוצת צמתיו U וקשורתוHon קשותות G שניי צמותיהו ב- U .
בטעז זה אין להניח את משפט PCP-Hardness.

לעומת $\text{Gap-5-Coloring}[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$ הוכיחנו $\text{Gap-5-Coloring}[\frac{1}{10}, \frac{1}{3}]$:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $G = (V, E)$

לפנינו נציג תרשים של הגרף G ובראשו מופיעים צבוקות זר של גראף G .

הגרף G מוצג כgraf על 10 נקודות. נקודות 1-5 נמצאות בטור אמצעי ונקודות 6-10 נמצאות בטור ימני.

הקשרים בין נקודות הטרור אמצעי נקבעים כמפורט בהמשך. נקודות 1-5 מושרחות על ידי גראף G .

הקשרים בין נקודות הטרור ימני מושרחות על ידי גראף G .

הקשרים בין נקודות הטרור אמצעי ונקודות הטרור ימני מושרחות על ידי גראף G .

הקשרים בין נקודות הטרור אמצעי ונקודות הטרור ימני מושרחות על ידי גראף G .

הקשרים בין נקודות הטרור אמצעי ונקודות הטרור ימני מושרחות על ידי גראף G .

הקשרים בין נקודות הטרור אמצעי ונקודות הטרור ימני מושרחות על ידי גראף G .

$\text{Gap-5-Coloring}[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \leq_p \text{Gap-3S}[\frac{1}{30}, \frac{1}{3}] = \text{Gap-3S}[\frac{1}{10}, \frac{2}{3}] \leq_p \text{Gap-VC}[\frac{1}{10}, \frac{1}{3}] \leq$

$\leq \text{Gap-VC}[\frac{29}{28}, \frac{29}{26}]$.

לעתה נוכיח $\text{Gap-3S}[\frac{1}{30}, \frac{1}{3}] \leq_p \text{Gap-5-Coloring}[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}]$.

ההוכחה נעשית באמצעות הוכחה ישירה. נניח כי G הוא גראף 3S על 30 נקודות. נסמן V_1, V_2, V_3 כקבוצות צמתים של גראף G ו

- V_1 ו- V_2 הן קבוצות צמתים זרות.
- $V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V$.
- $|V_1| = |V_2| = |V_3| = 10$.
- $|V_1 \cap V_2| = |V_2 \cap V_3| = |V_3 \cap V_1| = 0$.

נוכיח כי G מושרחות על ידי גראף G על 6 נקודות. נסמן U_1, U_2, U_3 כקבוצות צמתים של גראף G ו

- $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = V$.
- $|U_1| = |U_2| = |U_3| = 10$.
- $|U_1 \cap U_2| = |U_2 \cap U_3| = |U_3 \cap U_1| = 0$.

נוכיח כי G מושרחות על ידי גראף G על 3 נקודות. נסמן U_1, U_2, U_3 כקבוצות צמתים של גראף G ו

- $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = V$.
- $|U_1| = |U_2| = |U_3| = 10$.
- $|U_1 \cap U_2| = |U_2 \cap U_3| = |U_3 \cap U_1| = 0$.

נוכיח כי G מושרחות על ידי גראף G על 2 נקודות. נסמן U_1, U_2 כקבוצות צמתים של גראף G ו

- $U_1 \cup U_2 = V$.
- $|U_1| = |U_2| = 10$.
- $|U_1 \cap U_2| = 0$.

נוכיח כי G מושרחות על ידי גראף G על 1 נקודה. נסמן U_1 כקבוצה צמתים של גראף G ו

- $U_1 = V$.
- $|U_1| = 10$.
- $|U_1 \cap U_1| = 0$.

מספר מחברת:

3. נגידר את הפעיה N-STCONN. קלט: גראף מכוון $(V, E) = G$ ושני צמתים $V \in V, s, t$. שאלה: האם קיימים מסלול מכוון יחיד מ- s ל- t ?

א. הוכחו כי $\text{1-STCONN} \in \text{NL}$

NET total cost per unit
= $\frac{1}{2} \times (\text{cost of labor} + \text{cost of materials})$
= $\frac{1}{2} \times (100 + 100)$
= $\frac{1}{2} \times 200$
= 100

So, the cost per unit is $\$100$.

Now, let's calculate the profit per unit.

Profit per unit = $\text{Selling price per unit} - \text{Cost per unit}$
= $150 - 100$
= 50

So, the profit per unit is $\$50$.

Now, let's calculate the break-even point.

Break-even point = $\frac{\text{Total fixed costs}}{\text{Contribution margin per unit}}$
= $\frac{1000}{50}$
= 20

So, the break-even point is 20 units.

Now, let's calculate the total revenue at 20 units.

Total revenue = $\text{Selling price per unit} \times \text{Number of units}$
= 150×20
= 3000

So, the total revenue at 20 units is $\$3000$.

Now, let's calculate the total cost at 20 units.

Total cost = $\text{Cost per unit} \times \text{Number of units}$
= 100×20
= 2000

So, the total cost at 20 units is $\$2000$.

Now, let's calculate the net profit at 20 units.

Net profit = $\text{Total revenue} - \text{Total cost}$
= $3000 - 2000$
= 1000

So, the net profit at 20 units is $\$1000$.

ב. הוכיתו כי STCONN-1 היא NL-שלמה.

the second strike (60°) is the most prominent & has a 6.5° pitch. The
third strike (60°) is the least prominent & has a 1.5° pitch. The
second & third strikes are roughly parallel, dipping westward, & the
first strike is roughly parallel to the second, dipping eastward.
The first strike is roughly horizontal, dipping slightly eastward.
The second strike dips about 60° to the west, & the third strike
dips about 60° to the west. The first strike is roughly horizontal,
but the second & third strikes dip at an angle of about 60° to the
west. The first strike is roughly horizontal, dipping slightly eastward.
The second strike dips about 60° to the west, & the third strike
dips about 60° to the west. The first strike is roughly horizontal,
but the second & third strikes dip at an angle of about 60° to the
west.