סיבוכיות / תרגיל בית 5#

אריאל סטולרמן

(1)

סגירות NL לחיתוך:

יהיו $L_1, L_2 \in NL$, נראה כי $L_1 \cap L_2 \in NL$: $L_1, L_2 \in NL$ ולכן קיימות מ״ט M_1, M_2 מסוג $NL\text{-}TM$ המכריעות את L_1, L_2 בהתאמה במקום לוגריתמי לא דטר׳ באורך הקלט. ניתן לפיכך לבנות מ״ט M מסוג $NL\text{-}TM$ הפועלת באופן הבא: תחילה המכונה תפעל כמו המכונה M_1, אך בקונ׳ בה M_1 מקבלת, M תמחק את סרט העבודה ותחזיר את ראשי סרט הקלט וסרט העבודה לתחילתם. כעת תפעל M בדיוק כמו המכונה M_2.

<u>מקום</u>: M פועלת בדיוק כמו M_1 ו-M_2 מלבד מספר פעולות שאינן דורשות מקום, ולכן גם כן פועלת במקום לוגריתמי לא דטר׳.

<u>נכונות</u>: אם $x \in L_1 \cap L_2$ אז קיימות ריצות אי דטר׳ של $M_1(x)$ ו-$M_2(x)$ שהן ריצות מקבלות. לכן, בריצת $M(x)$ נעבור את שלב קבלת החלק המדמה את M_1, ולאחריו נעבור את השלב המדמה את M_2 שגם בסופו נגיע למצב קבלה, ולכן M מקבלת את x. אם $x \notin L_1 \cap L_2$ אז או ש-$x \notin L_1$ ואז M תדחה את x בשלב ריצת החלק המדמה את M_1, או ש-$x \notin L_2$ ואז M תדחה את x בשלב ריצת החלק המדמה את M_2 (או שניהם, ו-M תדחה בחלק הראשון של ריצתה), לכל ריצה אי דטר׳.

לכן $x \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow$ ריצת M על x מקבלת, ו-M היא מכונה מסוג $NL\text{-}TM$ (משתמשת במקום לוגריתמי לא דטר׳). ומכאן: $L_1 \cap L_2 \in NL$.

סגירות NL לאיחוד:

באופן דומה לחיתוך, נגדיר את M לרוץ תחילה כמו M_1, אך בקוני ש-M_1 מקבלת, גם M תקבל. בקוני ש-M_1 דוחה, M תמחק את סרט העבודה, תחזיר את הראשים להתחלה ותפעל כמו M_2.

<u>מקום</u>: הסבר דומה למקרה החיתוך.

<u>נכונות</u>: אם $x \in L_1 \cup L_2$ אז קיימת ריצה אי דטר׳ של $M_1(x)$ או $M_2(x)$ שהיא ריצה מקבלת (או שתיהן). נשים לב כי כיוון ש- $L_1, L_2 \in NL \subseteq P$, ניתן להניח כי M_1, M_2 אינן מתבדרות. אם $M_1(x)$ ריצה מקבלת (או שתי הריצות מקבלות), M תקבל בקונ׳ בה M_1 מקבלת. אם $M_2(x)$ ריצה מקבלת, M תקבל בקונ׳ בה M_2 מקבלת. בכל מקרה M תקבל. אם $x \notin L_1 \cup L_2$ אז שתי הריצות $M_1(x), M_2(x)$ דוחות לכל ריצה אי דטר׳, ולכן ריצת M תעבור את החלק המדמה את M_1 (דוחה), תעבור את החלק המדמה את M_2 ותדחה גם היא.

לכן $x \in L_1 \cup L_2 \Leftrightarrow$ ריצת M על x מקבלת, ו-M היא מכונה מסוג $NL\text{-}TM$. ומכאן: $L_1 \cup L_2 \in NL$.

(2)

(a) להלן תיאור אופן פעולת מ״ט דטר׳ המכריעה את PAL במקום לוגריתמי באורך הקלט:

א. תחילה נספור את אורך הקלט ונחזיק *counter0* שיחזיק את המספר $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.

ב. נחזיק *counter1* על סרט העבודה המאותחל ל-1.

ג. כעת נקרא את התו במקום ה-*counter1* בקלט ונשמור אותו על סרט העבודה.

ד. נלך לסוף הקלט ומשם נחזור שמאלה לתא הנמצא במרחק $counter1 - 1$ מהסוף.

ה. נבדוק את שוויון התו הנמצא בו עם התו ששמרנו על סרט הקלט: אם הם שונים, נדחה. אחרת:

ו. נעלה את *counter1* ב-1, וניתן גם למחוק את התו ששמרנו את סרט העבודה.

ז. נמשיך מסעיף ג׳ עד ש-$counter1 = counter0$, ונקבל.

<u>מקום</u>: לכל אורך פעולת האלג׳, מחזיק שני מונים הסופרים לכל היותר עד $\frac{n}{2}$ ולכן צורכים $\log n$ מקום בלבד, וכמו כן נעשה שימוש במקום קבוע נוסף. סה״כ האלג׳ צורך $\log n$ מקום.

<u>נכונות</u>: מיידי מתיאור האלג׳. המכונה בודקת שוויון כל תו בקלט x לתו המקביל לו ב-$Reverse(x)$ (פרט לתו הנמצא במרכז המחרוזת באם המחרוזת באורך אי זוגי). אם ישנו שוני המכונה דוחה, אחרת מקבלת. מהגדרת PAL כ-$\{x \mid x = Reverse(x)\}$, הנכונות מיידית.

<u>זמן ריצה</u>: שלב א׳ לוקח $O(n)$ זמן. הלולאה שרצה משלב ג׳ רצה למשך $O(n)$ איטרציות, ובכל איטרציה מבצעת $O(n)$ פעולות – ריצה מקצה לקצה על הקלט, בדיקת שוויון המונים ועוד כמה פעולות קבועות. סה״כ זמן הריצה של האלג׳ הוא $O(n^2)$.

(b) להלן תיאור מ״ט לא דטר׳ המכריעה את $\overline{PAL}$ במקום לוגריתמי ובזמן ריצה לינארי :

המכונה תנחש שני תוים מקבילים בקלט x וב-$Reverse(x)$ השונים זה מזה, תבדוק שמיקומם אכן מקביל ושהם שונים זה מזה.

מקום : סה״כ צריך מקום להחזקת התו הראשון , התו המקביל לו ומונים המחזיקים את מיקום התו הראשון ביחס לתחילת הקלט והתו השני ביחס לסוף הקלט (השוואת מונים אלו מוודאת מיקום מקביל).

נכונות : מיידית.

זמן ריצה : ניחוש שני התוים וספירת המונים למיקומם לוקחים זמן לינארי, והשוואת התוים זמן קבוע. סה״כ : $O(n)$ זמן, כנדרש.

(3)

$CYCLE1=\{<G>\mid G\ is\ a\ directed\ graph\ with\ out\ degree\leq 1, G\ contains\ a\ cycle\}$. להלן תיאור מ״ט המשתמשת במקום לוגריתמי ומכריעה שפה זו :

תחילה המכונה תבדוק אם קיימת לפחות קשת אחת בגרף . אם לא, תדחה. אם כן, המכונה תעבור על כל קודקוד v בגרף לפי הסדר ועליו תבצע :

- תשמור אותו על סרט העבודה.
- תלך על מסלול היוצא ממנו (אם קיים), ולכל קודקוד אליו מגיעה תבדוק האם הוא שווה ל- v. אם כן , תקבל. אם לא תמשיך עד שתגיע לקודקוד בו דרגת היציאה 0.

אם לאחר מעבר על כל הקודקודים בגרף לא התקיים התנאי לעיל, תדחה.

מקום : בכל איטרציה נשמר קודקוד אחד, אליו מצפים להגיע בסגירת מעגל . כמו כן במהלך האיטרציה נשמרת קשת אחת על סרט העבודה עם התקדמות במסלול. במקביל מוחזק מונה העוקב אחרי מס׳ הקודקוד אותו בודקים. כל הנ״ל לוקחים $O(\log n)$ מקום.

נכונות : כיוון שדרגת הגרף היא לכל היותר 1, מספיק לבדוק מסלול אחד (אם קיים) היוצא מכל קודקוד בגרף. אם מסלול זה אינו סוגר מעגל, הנבדק ע״י השוואה לקודקוד המקור הנשמר על סרט העבודה , אז בטוח לא קיים מסלול אחר , בפרט מעגל, היוצא מאותו קודקוד . מכאן, שמספיק לבדוק לכל קודקוד מסלול אחד (אם קיים) היוצא ממנו ולראות האם הוא סוגר מעגל . אם קיים מעגל , ודאי שימצא עבור אחד הקודקודים . אם לא קיים מעגל , לאחר מעבר על כל הקודקודים המכונה תדחה.

(4)

(a) להלן תיאור מ״ט לא דטר׳ עם מקום לוגריתמי המכריעה את $UPATH=\{<G,s,t>\mid G\ is\ an\ undirected\ graph, s,t\ are\ connected\}$:

המכונה מתחילה לבדוק מסלול מ- s, ובכל צעד מנחשת שכן של הקודקוד עליו נמצאת , וממשיכה אליו . אם המכונה מגיעה לקודקוד t, תקבל. אחרת, לאחר מעבר על n קודקודים (החזקת מונה למיקום במסלול), תדחה.

מקום : בכל צעד מחזיקים רק קודקוד אחד על סרט העבודה ומונה הסופר עד n, ואלו תופסים מקום לוגריתמי באורך הקלט.

נכונות : אם s ו-t מחוברים, אז קיי ם מסלול לא מכוון המחבר את s ל-t ולכן קיים ניחוש שימצא את אותו מסלול והמכונה תקבל . אם s ו-t אינם מחוברים, אז אף ניחוש מסלול המתחיל מ- s לא יגיע ל- t תוך n צעדים. לכל היותר, s ו-t מרוחקים n קשתות אחד מהשני , ולכן מספיק לבדוק עד n. במקרה זה המכונה תדחה.

(b) להלן תיאור מ״ט לא דטר׳ עם מקום לוגריתמי המכריעה את $\overline{2COL}$:

ידוע כי לא קיימת 2-צביעה חוקית לגרף לא מכוון אמ״מ הגרף אינו דו צדדי אמ״מ קיים בגרף מעגל באורך אי זוגי. אם כן, המ״ט תנחש שני צמתים s,t ותסמלץ את המ״ט המכריעה את $UPATH$ תחילה על $<G,s,t>$ ולאחר מכן על $<G,t,s>$, תוך החזקת מונה לאורך שני המסלולים המנוחשים בסימולציות אלו יחד. אם אחת מסימולציות $UPATH$ נכשלת, נדחה. אם שתיהן עברו, נבדוק את תוכן המונה – אם זוגי נדחה, אם אי זוגי נקבל.

מקום : סה״כ בנוסף למקום הלוגריתמי הדורש $UPATH$ צריך רק להחזיק מונה שיכול למנות עד $2\cdot|V|$ ואת שני ניחושי הקודקודים – מקום לוגריתמי.

נכונות : אם לא קיימת 2-צביעה חוקית בקלט G, אז קיים בו מעגל אי זוגי, ולכן קיים ניחוש של שני קודקודים על מעגל זה s ו-t כך שקיים מסלול לא מכוון $s\rightarrow t$ ומסלול לא מכוון $t\rightarrow s$, שסכום אורכי המסלולים הללו הוא אי זוגי, ולכן נקבל. אם יש 2-צביעה חוקית, אז לא קיים בגרף מעגל באורך אי זוגי ולכן לכל ניחוש של שני צמתים s,t התנאים הנדרשים לא יתקיימו ונדחה.

(5)

נגדיר את הבעיה: $OddCycle = \{< G > \mid G\ is\ a\ directed\ graph\ with\ an\ odd\ cycle\}$. להלן הוכחה ש- $OddCycle \in NLC$:

נראה תחילה כי $OddCycle \in NL$:

נגדיר מ"ט M עם מקום לוגריתמי המקבל עד על סרט עדות. M מוודאת את סרט העדות באופן הבא: מחזיקה מונה למספר הצמתים הנמצאים על סרט העדות, הגדל ב-1 לכל צומת שנקרא מהעד. הצומת הראשון נשמר על סרט העבודה לאורך כל האלג'. המכונה מוודאת שהמסלול תקין (כלומר, לכל u, v על סרט העדות קיימת בגרף הקשת (u, v)) ושהצומת האחרון ע"ל העד שווה לצומת הראשון שנשמר בתחילת הריצה. אם לאורך הבדיקה המסלול אינו תקין, נדחה. אם בסוף הריצה המסלול אינו מעגל, גם כן נדחה. אחרת נבדוק שהתקבל מספר אי זוגי (האם ספרת האחדות של מונה אורך המסלול היא 0 או 1), ונקבל / נדחה בהתאם.

<u>מקום</u>: בכל שלב באלג' נשמרים הצומת הראשון, מונה אורך המסלול וצעד בודד בבדיקת המסלול (צומת או קשת), וכל אלו תופסים מקום לוגריתמי.

<u>נכונות</u>: אם קיים מעגל באורך אי זוגי בגרף, אז בהינתן העד המתאים המכונה תעבור את כל שלבי הבדיקה כמתואר באלג' פעולתה ותקבל. אם לא קיים מעגל באורך אי זוגי בגרף, אז לכל עד שלא ינתן, הריצה תדחה או כיוון שהעד לא מייצג מעגל או שהמעגל שמייצג הוא באורך זוגי.

נראה כעת רדוקציה במקום לוגריתמי $CONN \leq_L OddCycle$: בהינתן $< G, s, t >$, נבנה את הגרף G' באופן הבא: לכל $(u, v) \in E(G)$ נשים ב- $E(G')$ את הקשתות $(u, w), (w, v)$ ונוסיף ל- $V(G')$ את w (לכל קשת יתווסף צומת חדש, לא אותו צומת לכולם; $V(G')$ יאותחל ל- $V(G)$). כמו כן נוסיף ל- $E(G')$ את הקשת (t, s). נראה כי $< G, s, t > \in CONN \Leftrightarrow G' \in OddCycle$:

<u>מקום</u>: תחילה צריך רק לבדוק את מספר הקשתות, וזאת ע"י מונה במקום לוגריתמי. כל פעולה א"ח יכולה להתבצע עם מספר קבוע של מונים והעתקת הקלט / כתיבת צמתים וקשתות חדשים ישירות לסרט הפלט.

<u>נכונות</u>: נניח כי $< G, s, t > \in CONN$, אז קיים ב- G מסלול מכוון מ- s אל t. כיוון שב- G' סה"כ "חילקנו" כל קשת ל-2, אז כל הנגישויות ב- G השתמרו, ולכן גם ב- G' קיים מסלול מ- s ל- t. כיוון שכל קשת הוכפלה, מסלול זה באורך זוגי. כמו כן $(t, s) \in E(G')$ ולכן קיים מעגל מכוון העובר דרך s ו- t באורך אי זוגי.

נניח כי $< G, s, t > \notin CONN$, אז לא קיים ב- G מסלול מ- s אל t. ב- G' לא קיימים מעגלים אי זוגיים: כל מסלול או מעגל שהיו ב- G הם בהכרח באורך זוגי ב- G', מאופן בניית G'. הדרך היחידה לבנות מעגל אי זוגי ב- G' היא ע"י מעגל העובר ב- s וב- t, שכן קיימת קשת (t, s), אך כיוון שב- G t לא נגיש מ- s אז כך גם ב- G'. לפיכך לא קיים ב- G' מעגל באורך אי זוגי, ולכן $G' \notin OddCycle$.

כיוון ש- $CONN \in NLC$ ו- $OddCycle \in NL$, אז $OddCycle \in NLC$, כנדרש.

(6)

להלן הוכחה ש- $NP \subseteq NL^*$:

תהי $L \in NP$, אז קיימת מ"ט M ופולינום p כך שלכל $x \in \{0,1\}^*$: $x \in L \Leftrightarrow \exists w \in \{0,1\}^{p(|x|)}. M(x, w) = 1$. נגדיר מכונה M' מסוג NL^*TM כך:

נגדיר את הא"ב של M' כא"ב של M מאוחד עם קבוצה סופית כלשהי של תווים מיוחדים לשימוש M' בלבד. העד שיתקבל ע"י M' יהיה הפולינום p, רשימת המצבים Q_M וטבלת המעברים (דטרמיניסטית במודל זה של M) δ_M ולבסוף סדרת הקונ' של ריצת $M(x, w)$ כאשר w עד הגורם ל- M לקבל, כאשר לפני תחילת כל קונ' יופיע המצב בו נמצאת המכונה באותה קונ', וכל תא מיוצג ע"י התו הנמצא בו והאם הראש עליו. M' תפעל באופן הבא:

תחילה תבדוק את תקינות δ_M בכפוף ל- Q_M. אם אינה תקינה, תדחה. לאחר מכן תבדוק שכל הקונ' הם מאורך לכל היותר $p(|x|)$ ושמספר הקונ' גם כן לכל היותר $p(|x|)$. אם לא מתקיים התנאי, תדחה. אם כן, תעבור על הקונפיגורציות המופיעות בעד ותבדוק את תקינותן (כפי שהוגדר ברדוקציה ל- SAT בהרצאה): תבדוק שהקונ' הראשונה היא קונ' התחלה (מצב התחלתי, הראש נמצא מעל התו הראשון ורצף התוים הוא בדיוק שווה לקלט M'), תבדוק שכל מעברי הקונ' העוקבות תקניים לפי δ_M, ושהקונ' האחרונה אכן מקבלת. אם אחד התנאים בבדיקה לא התקיים, M' תדחה. אחרת, תקבל.

<u>מקום</u>: כל אחת מהבדיקות דורשת מקום לוגריתמי בלבד:

- בדיקת תקינות δ_M: לכל ערך בטבלת המעברים צריך לשמור בכל זמן נתון על סרט העבודה מעבר אח ד בלבד, כדי לבדוק את תקינותו ביחס ל- Q_M ולבדוק שלא קיים מעבר אחר סותר ב- δ_M.
- בדיקת תקינות אורך הקונ' ומספרן: סה"כ צריך להחזיק שני מונים שכל אחד מהם מונה עד $p(|x|)$, וזאת במקום לוגריתמי.
- בדיקת תקינות הקונ': בכל צעד צריך לשמור נתונים בתופסים מקום קבוע: או תוכן תא באחת הקונ', או מיקום ראש, או מצב הקונ', ובמקביל להחזיק מונים שצריכים למנות עד $p(|x|)$ לכל היותר, וזאת במקום לוגריתמי.

<u>נכונות</u>: תחילה, העד הוא פולי׳: הפולינום p, טבלת המעברים, מספר המצבים ותוכן תא בודד ב קוני׳ תופסים מקום קבוע. סך הקוני׳ תופסות $p^2(|x|)$ מקום, ולכן העד הוא פולי׳. אם $x \in L$, אז קיים פולינום p, מ״ט M ועד $w \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ כך ש-$M(x,w) = 1$. לפיכך קיים עד מתאים ל-M' המתאר את נתוני M ואת ההיסטוריה החישובית החוקית של הריצה המקבלת של $M(x,w)$, ולכן M' תקבל. אם $x \notin L$ אז לא קיים w הגורם ל-$M(x,w)$ לקבל, ולכן כל ריצה של M' על כל קלט של היסטוריה חישובית של ריצת $M(x,w)$ עם כל $w \in \{0,1\}^{p(|x|)}$ תדחה. ומכאן $x \in L \Leftrightarrow M(x)$ ריצה מקבלת.

ומכאן: $L \in NL^*$, ולכן $NP \subseteq NL^*$

נניח כעת כי $P \neq NP$, כלומר קיימת שפה $L \subseteq \{0,1\}^*$ כך ש-$L \in NP, L \notin P$. כיוון ש-$NP \subseteq NL^*$, אז $L \in NL^*$. כיוון ש-$NL \subseteq P$ ו-$L \notin P$ אז $L \notin NL$. מכאן שקיימת שפה השייכת ל-NL^* ואינה שייכת ל-NL, ולכן $NL \neq NL^*$, כנדרש.