***DSP* שיעור 2#**

חיבור סיגנלים:

ניתן לחבר שני אותות, וסכומן הוא גם כן אות.

- אות דיגיטלי: $\forall n. z_n = x_n + y_n$
- אות אנלוגי: $\forall t. z(t) = x(t) + y(t)$

אפשר להסתכל על חיבור זה כחיבור וקטורים כאשר מספר רכיבי הוקטור הוא אינסופי($\aleph_0$).

<u>דוגמא נוספת</u>: $y = ax$,$\forall t. y(t) = a \cdot x(t)$, באופן דומה לאות דיגיטלי.

אם a בדוגמא לעיל הוא מספר חיובי, נקבל הגבר, והאנרגיה שלy תגדל בפקטור ריבועי בגלל משוואת האנרגיה($E_y = a^2 E_x$).

אופרטור $\hat{z}$ הינו סימון מקובל לפקטור שאינו מתאים לאות דיגיטלי כיוון שהוא רציף בזמן ולכן מתאים רק לאות אנלוגי: $y = \hat{z} \cdot x$.

נסתכל על משוואת האנרגיה:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 \Rightarrow E_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (ax_n)^2 = a^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2 = a^2 E_x$$

נסתכל על משהו שלא ניתן לעשות עם אות אנלוגי, $\hat{z}^{-1}$ שהוא הפיגור בזמן. הוא מקיים: $x = \hat{z} \cdot \hat{z}^{-1}$ (**להשלים קטע זה**).

נניח שבכל רגע אנו מקבלים ערך, ועלינו לכתוב תוכנה המוציאה את הערך הבא. אם הסיגנל דטרמיניסטי, ניתן. אם הסיגנל סטוכסטי, מה ניתן לעשות?

ניתן להשתמש ב-$\hat{z}^{-1}$. נסמן $y = x_{n-1}$, אזי התהליך הוא: $x \to \boxed{\hat{z}^{-1}} \to y$. לתהליך זה יש צורך **בזיכרון**.

נאמר כי אופרטור הוא <u>קוזאלי</u> אם יש לו זיכרון בפנים, ולא קוזאלי אם לא.

אמרנו שהכפלת וקטור בסקלר מקבילה להגבר בנוגע לאותות. סיגנל ה-0 הוא סיגנל בעל אנרגיה סופית 0, רוחב סרט סופי 0 לאורך כל הזמנים. כמו כן, לכל סיגנל x ניתן להגדיר סיגנל $-x$, כך ש-$x + (-x) = 0$, שהוא סיגנל ה-0. מהגדרת סכום על סיגנלים נובע כי אוסף כל הסיגנלים מהווים <u>מרחב וקטורי לינארי</u> (אוסף וקטורים שמכפלתם נותנת וקטור, קיים וקטור ה-0 וכו'). אם כן אוסף כל הסיגנלים הספרתיים מהווים מרחב וקטורי, וכנ"ל לגבי אוסף כל הסיגנלים האנלוגיים. שני מרחבים וקטורים אלו שונים זה מזה

מרחב הסיגנלים כמרחב וקטורי:

משפט מאלגברה לינארית:

לכל מרחב וקטורי קיים בסיס (לפחות אחד), כאשר בסיס פורש את המרחב והוא בת"ל (קיים לו ייצוג יחיד).

<u>ביטוי בסיגנלים</u>:

במקרה זה בסיס יהיה אוסף של סיגנלים הפורשים את המרחב. יהי בסיס s^1, s^2, s^3. לכל סיגנל x חייב להתקיים: $x = a_1 s^1 + a_2 s^2 + a_3 s^3$ עבור a_i קבועים כלשהם. סיגנל זה הוא סכום (מספר כפול סיגנל), שהוא כאמור לעיל – סיגנל. אוסף הסיגנלים הוא – סיגנל. אם קיים סיגנל שלא ניתן לכתיבה כצירוף לינארי של מה שהוגדר כבסיס, אזי אותו אוסף סיגנלים אינו בסיס.

בסיס הוא בעל מספר האיברים הקטן ביותר הפורש את המרחב. מתקיימת אי תלות: סיגנל ה-0 מתקבל רק עבור ההצבה 0 לכל a_i. נזכור גם כי מספר האיברים בבסיס שווה למימד המרחב הוקטורי.

<u>בסיס למרחב הסיגנלים</u>:

ב-*DSP* נבצע הרבה מעברים מבסיס לבסיס, ונשתמש באלגוריתם ה-*FFT* לצורך כך.

- תזכורת לסיגנל ה-*UI* (סיגנל ההלם, ספרתי): $UI_n = \delta_{n,0} = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}$.
- סיגנל ה-*SUI* – הלמים מוזזים. סיגנלים מהצורה: $SUI_n = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0, n \neq k \\ n, n = k \end{cases}$, עבור k כלשהו. *UI* הוא למעשה *SUI* עם הזזה 0.

טענה: אוסף כל סיגנלי מהווים בסיס למרחב הסיגנלים (שמימדו $\aleph_0$ במרחב הסיגנלים הספרתיים, $\aleph$ במרחב הסיגנלים האנלוגיים).

הוכחה:

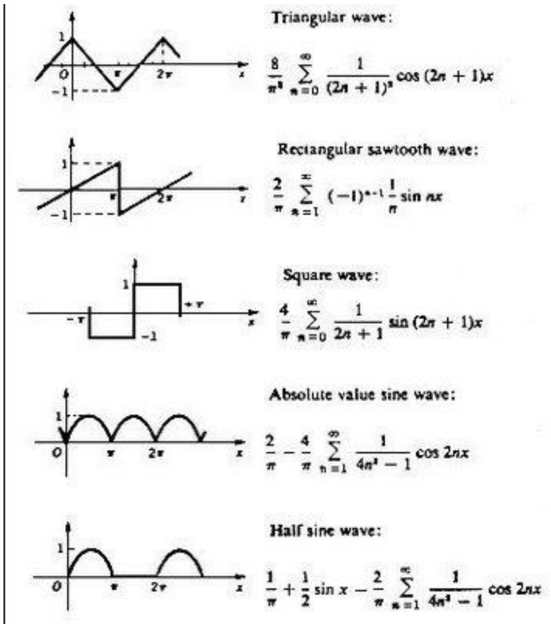
אם ניקח צירוף לינארי של מספר סיגנלי *SUI*, למשל $SUI^{-2}, SUI^{-1}, SUI^0, SUI^1$, נוכל לבנות ממנו סיגנל: כל סיגנל נותן ערך עבור n יחיד, וכך הצירוף הלינארי מהווה סיגנל. הסיבה שזה כך היא: בכל זמן רק סיגנל אחד שונה מ- 0. בנוסף, כל ה-*SUI* בת"ל כיוון שהצירוף הלינארי שלהם יהיה שווה ל- 0 אמ"מ כל המקדמים בצירוף הם 0. □

המרצה רצה להראות לנו דמו (אבל לא היה לו מטלב) של טור פוריה.

כאשר לוקחים סכ ום סינוסים ניתן לקבל "גלים מרובעים" או "גלים משולשים" וכן הלאה. הרעיון של פורייה היה שכל סיגנל מחזורי ניתן לייצוג ע"י טור סינוסים.

נשים לב כי טור (סכום אינסופי) של פונ' גזירות לא חייב להיות גזיר , ולכן ניתן לקבל סיגנלים מהצורות האלה.

אבל, סכום פונ' זוגיות הוא פונ' זוגית, כנ"ל לגבי אי זוגיות , כמו כן מחזוריות נשמרת בסכום. לכן אם לוקחים סכום סינוסים מקבלים פונ ' אי זוגית , וסכום קוסינוסים מקבלים פונ' זוגית.



פורייה טען שכל פונקציה ניתן לכתוב כסכום פונ זוגית עם פונ' אי זוגית:

$$f(t) = f^{even}(t) + f^{odd}(t)$$

כאשר $f^{even}(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}, f^{odd}(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2}$. מכאן הסיק שכל פונ ' מחזורית ניתנת לכתיבה בסכום של פונ' מחזורית זוגית עם פונ' מחזורית אי זוגית. מכאן:

משפט פורייה:

כל פונקציה מחזורית ניתן לכתיבה באופן הבא:

$$f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin l\omega t + \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos l\omega t}_{=b_0+\sum_{l=1}^{\infty} b_l \cos l\omega t}$$

נתבונן בטור טיילור: $f(t) = f(0) + \cdots f'(0) + \cdots$ - מסתכלים על זמן 0 ומנסים לתאר את הפונקציה בכל זמן. טור טיילור מדייק יותר באיזור של הזמן המיוחס ($t=0$), אך טור פורייה מתכנס באותה מידה בכל הזמנים בו"ז. בעיבוד אותות הסיגנל צריך להיות מוגדר בכל זמן $-\infty < t < \infty$, ולכן טור פורייה יותר מתאים. אבל טור פורייה מתאר רק פונקציות מחזוריות. לצורך כך מה שעושים הוא **טרספורם פורייה**.

<u>טרנספורם פורייה</u>:

$\omega = 2\pi f$, כאשר f הוא התדר. ω נותן מדידה של רדיאנים בשניה. ω הוא סה"כ המרה של t ליחידות רדיאנים כקלט לפונ' הסינוס. כיוון ש- $f = \frac{1}{T}$, אז ככל שהמחזור רחב יותר , כך התדר קטן יות ר, וכך מקבלים יותר ויותר קווים על ציר ה- t המתארים את הסיגנל. נתייחס לסיגנל לא מחזורי כסיגנל מחזורי עם מחזור אינסוף, ומה שיתקבל הוא פונקציה שלמה, במקום אוסף בדיד של קווים. הפונקציה השלמה שמתקבלת היא טרספורם פורייה.

טרספורם: פעולה מתמטית הנעשית על משהו מסוג מסויים שנותנת לי משהו מאותו סוג אך שונה . למשל, לקיחת פונקציה וקבלת פונקציה. טור פורייה לא היה טרנספורם , כיוון שהתקבלה מהפונקציה סדרה . טרנספורם פורייה יסומן : $S(\omega)$. תמיד נסמן באות גדולה את הטרנספורם , והפונקציה המקורית באות קטנה.

אם כן , מצאנו דרך להצגת כל סיגנל באמצעות הבסיס $\sin l\omega t , \cos l\omega t$ לכל $l \in \mathbb{N}$. לפי משפט פורייה , מצאנו קבוצה פורשת לסיגנלים אנלוגיים מחזוריים. מדוע קבוצה זו בת "ל: כל רכיבי הסינוס והקוסינוס אורתוג ונליים, כלומר המכפלה הפנימית שלהם היא 0: $\int_{-\infty}^{\infty} \sin l\omega t \cdot \cos l\omega t = 0$ (אולי חיבור ביניהם?). מכאן קבוצה זו היא <u>בסיס</u>, כמו בסיס ה-SUI מקודם.

נשים לב כי מתקיים:

$f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin l\omega t + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos l\omega t = \sum c_l \cdot \sin(l\omega t + \varphi_l)$,

$c_l = \sqrt{a_l^2 + b_l^2},\ \ \varphi_l = \tan_4^{-1}\frac{a_l}{b_l}$

לכאורה התקבלה סדרה אחת של סיגנלים, אך ה-φ_l משנה את הסיגנל, בעוד אנו מצפים למשהו מהצורה של מקדם כפול הסיגנל

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\cdot\sin\omega t \ \Rightarrow\ \ \cos\omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},\qquad \sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

ומכאן:

$f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin l\omega t + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos l\omega t = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \cdot e^{il\omega t}$

כאשר d_l הוא מספר מרוכב. אבל, $e^{i\omega t}$ הוא לא סיגנל כיוון שהוא לא ממשי . כמו כן, ω כעת הוא מ- $-\infty$ ל-∞, כלומר מקבל ערכים שליליים. אם כן מצאנו בסיס אך הוא חסר הגיון: מרוכב ועם תדרים שליליים.

אנו נשתמש בבסיס זה. תדר "שלילי" אינו שלילי באמת, ולבסוף בחישובים נסתכל רק על החלק הממשי. השימוש באקספוננט מרוכב היא לצורכי פישוט מתמטי בלבד. מעתה נשתמש בבסיסים:

- $e^{i\omega t}$ בסיס לסיגנלים אנלוגיים, $e^{i\omega n}$ בסיס לסיגנלים דיגיטליים.
- בסיס ה-SUI

$s(t), S(\omega)$ - סיגנלים אנלוגיים ; s_n, S_k - סיגנלים דיגיטליים ; $s_n / s(t)$ הם המקדמים שמכפילים את איברי הבסיס : $s = \sum_n s_n \cdot SUI^n$, או: $\sum_k S_k \cdot e^{ikn}$. המעבר מהראשון לשני $(s_n \to S_k)$ באמצעות טרנספורם פורייה – DFT; הדרך ההפוכה היא $iDFT$ (עבור סיגנל דיגיטלי ; לסיגנלים אנלוגיים: FT בכיוון טרנספורם פורייה, iFT בכיוון השני).

לסיכום, היום למדנו שניתן להציג את הסיגנל , בנוסף לציר הזמן , גם בציר התדר , ואלו שני הבסי סים השונים הנ"ל. סיגנלים הם יותר מאשר אוסף ערכים, ניתן לחברם, להכפיל אותם בהגברה, להזיזם בזמן, לייצגם בתור מרחב לינארי וקטורי , ולייצגם באמצעות שני בסיסים: SUI המשרה את ציר הזמן ובסיס האקסי' המרוכבים המשרה את ציר התדר. פעם הבאה: ספקטרום.