DSP שיעור 5#

תזכורת לפעם שעברה:

עד כה דיברנו על מערכת עם קלט אחד ופלט אחד, למשל מסנן. התחלנו להסתכל על מקרים בהם המערכת לא ידועה, ויש קלט ופלט. בהינתן מערכת, ניתן להכניס קלט כרצונינו, לראות את פלט המערכת, ואז לדעת מהי המערכת. כלומר, מה הפלט לכל קלט אפשרי. ניתן לפתור בעיה זו באופן כללי רק אם המערכת היא מסנן. הראינו שאם המערכת לא לינארית או לא אינוו' כלפי הזמן, בעיה זו לא פתירה.

היום נפתור בעיה זו תו"כ למידת דברים נוספים על מסננים. נראה פרמטריזציות של מסננים ונבין היטב את סוגי המסננים שדברנו עליהם עד כה.

אז נתחיל עם הבעיה שבהינתן מערכת ואפשרות לבדוק את הפלט לקלטים שונים, צריך לגלות מה המערכת עושה. אסטרטגיות:

פתרון 1: מבוסס מתקף, הלם:

הלם/מתקף – סיגנל שהוא 0 בכל הזמנים פרט ל-$n = 0$ (נדבר על המקרה הספרתי; ניתן לחזור על הדיון עבור סיגנלים אנלוגיים). **שרטוט 1**. המסנן הוא מסנן סיבתי; מזמן $n = 0$ מתקבל ערך והפלט מתחיל להיות שונה מ-0. היציאה, תגובת המערכת היא התגובה להלם (IR).

שרטוט 2: אחרי זמן סופי התגובה יורדת ל-0 ונשארת כך. במקרה זה המסנן הוא FIR – $finite\ input\ response$ – סופי בזמן (לא בגודל).

שרטוט 3: IIR – $infinite...$ - התגובה מזמן $n = 0$ נשארת לא 0 לעד. דוגמא:

$$y_n = x_n + y_{n-1}, y_0 = 1 \Rightarrow y_1 = 1, \ldots \Rightarrow IIR, y_i = 1\ forever$$

אם כן רוצים להכניס למערכת הלם ולמדוד את התגובה להלם. טענה: בדיקת הלם נותנת את כל האינפורמציה להכיר את המערכת. אם כן אנו יודעים פלט לקלט UI. מה עבור SUI עבור $n = 1$? כיוון שהמערכת מסנן, אז התגובה תהיה זהה פשוט מוזזת ב-1, כי המערכת אינוו' כלפי הזמן. **שרטוט 4**. כנ"ל לגבי חיבור סיגנלים, בגלל לינאריות המערכת. בגלל שכל סיגנל ניתן לייצג ע"י SUI (פורשים את מרחב הסיגנלים), אז IR מאפיין חד ערכי את המסנן ואין עוד אינפורמציה חסרה. לכל קלט, לא משנה איך נראה, ניתן לדעת מה הפלט.

למסנן FIR ה-IR הוא סופי, ולכן צריך לדעת מספר סופי של מקדמים; לעומת זאת ל- IIR צריך לדעת באופן עקרוני מספר אינסופי של מקדמים. נראה בהמשך מה עושים עם אינסוף זה. אם כן ה-IR מהווה פרמטריזציה (דרך) לייצג מסנן.

פתרון 2: הכנסת sin:

שרטוט 5. בוחרים את הקלט x להיות sin בתדר מסויים. ידוע ש- sin הוא סיגנל עצמי של כל מסנן, כלומר y יהיה סינוס באותו תדר (אולי מוגבר או מונחת, אך אותו תדר, והוא יהיה סינוס). מה יהיה הפלט אם אכניס קלט אחר? האינפורמציה שלמדנו מהסינוס האחד לא מלמדת על סינוס אחר. לכן אסטרטגיית ה-FR – $frequency\ response$ היא:

לוקחים תדר ראשון, מכניסים דרך המסנן ומקבלים את y שלו. כאמור, y הוא אותו סינוס רק מוגבר או מונחת – a שינוי אמפליטודה, ומוזז - ϕ ולכן נעשה טבלה:

ω	A	ϕ
0	1.1	2°
1	1.2	3°
...		

הטבלה הזו היא התגובה לתדר, כיוון שהיא תגובת המסנן לכל תדר ותדר. גם התגובה לתדר נותנת את כל האינפורמציה בקשר למסנן. מדוע?

אם נצייר סיגנל כללי, משהו שאינו סינוס? למשל סכום שני סינוסים. ניזכר כי גם סינוסים וקוסינוסים (או קומפלקסים) פורשים את מרחב הסיגנלים – כל סיגנל וסיגנל ניתן לכתוב כסכום משוקלל של סינוסים וקוסינוסים – משפט פורייה. לכן מה שצריך לעשות הוא לפרק לאקספוננט מרוכב. בהינתן סכום, אנו יודעים לכל איבר בסכום לפי הטבלה מה קורה לו במערכת. המסנן הוא לינארי ולכן אם ידוע פלט המערכת ל- x_1, x_2 אז גם $ax_1 + bx_2$ ניתן לחישוב. כלומר כל שצריך זה למצוא מקדמים בבסיס בציר התדר, ולהרכיב את הסיגנל הנדרש מהם. לפיכך גם התגובה לתדר מכילה את כל האינפורמציה לגבי מסנן.

דרך לעבור מתדר להלם: טרנספורם פורייה

כאשר דיברנו בהתחלה על מסננים התייחסנו ל- $H_k, H(\omega)$ שהם A ו-ϕ כך ש-$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ או בספרתי: $Y_k = H_k X_k$. התגובה להלם תסומן h_n - בציר הזמן; בציר התדר הסימון הוא אות גדולה. לפיכך IR h_n הוא טרנספורם הפורייה הדיסקרטי של FR H_k ולהיפך. בהמשך נוכיח זאת.

<u>*FR* ו-*IR* של eigensignal</u>:

נסמנו h_n ונחשב אותו:

עבור $y_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}$ - מסנן לא סיבתי שהוא *low-pass*. חישבנו את ה-*FR* ונראה כיצד נחשב את ה-*IR*:

ב-$n = 0$ מתקיים $x = 0$. ב-$n = -1$ נקבל את הערך $\frac{1}{4}$. ב-$n = 0$ נקבל $y = \frac{1}{2}$. אז התגובה להלם תהיה $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ (ובסוף חישב אחד נוסף $-\frac{1}{4}$) ואלו בדיוק המקדמים של המסנן. אם זה היה $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$: כאשר $n = -1$ מתקבל $\frac{1}{4}$, כאשר $n = 0$ נקבל $\frac{1}{3}$ וכאשר $n = 1$ נקבל $\frac{1}{2}$. מכאן שה-*IR* מורכב מהמקדמים אך בסדר הפוך – האחרון מתקבל כראשון. כלומר $h_1 = \frac{1}{2}, h_0 = \frac{1}{3}, h_{-1} = \frac{1}{4}$. ובעצם $y_n = h_1x_{n-1} + h_0x_n + h_{-1}x_{n+1}$ - וזו <u>קונבולוציה</u>.

ניתן להרחיב ביטוי זה מהדוגמא ונראה שכל מסנן *MA*, עם מספר סופי של מקדמים, תמיד נקבל משהו מהצורה $\sum h_i x_{n-i}$ - וזה *FIR*.

- אם כן: אם המסנן הוא *FIR* – הוא יכול להיות מסנן *MA*, למעשה כל *FIR* הוא *MA* ולהיפך.
- מה עם מסנן ה-*IIR*?

לכל מסנן יש ייצוג $y_n = \sum_l \underset{IR}{h_l} x_{n-l}$ ובייצוג הקודם: $Y_k = H_k X_k$ (כי קונבולוציה בציר הזמן היא מכפלה בציר התדר והפוך). מה הקשר לנוסחת מסנן *MA*? ניזכר כי מסנן הוא *MA* אם $y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}$ - יש מספר סופי של aים ולכן יהיה מספר סופי של h_l. זה נכון ב-*MA* אך לא למקרה הכללי.

אז: <u>כל *MA* הוא *FIR* וה-*IR* (ה-h) ידועים</u>.

ניזכר ב-$\hat{z}^{-1}$: $y = \hat{z}^{-1}x \Rightarrow y_n = x_{n-1}$. בלה בלה בלה.

אם $x_n = c_1x_{n-1} + x_2x_{n-2}$ אז $x = c_1\hat{z}^{-1}x + c_2\hat{z}^{-1}x = (c_1\hat{z}^{-1} + c_2\hat{z}^{-1})x$.

תרגיל: למצוא את c_1, c_2 עבורו הנ"ל הוא מסנן.

בעיה קשה יותר:

בהינתן מערכת שהיא מסנן, <u>לא ניתן להכניס למערכת מה שרוצים</u>. נראה שגם אם נכנס למערכת סיגנל עם כל התדרים, עדיין הבעיה קשה.

נניח שבמערכת נתונה יש מסנן *MA* אם שלושה מקדמים: $y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$. במקרה זה $h_i = a_i$ לכל $i = 0,1,2$ ולכל i אחר $h_i = 0$.

אז איך מוצאים אותם? נניח כי בהתבוננות על המערכת, הקלט הוא כל הזמן 0, ופתאום מתחיל להיות לא 0. למה זו הקלה?

נגדיר את הזמן של הפעם הראשונה שהסיגנל הוא לא אפס כ- $n = 0$. אז ידוע כי עד אז הסיגנל היה 0 אבל $x_0 \neq 0$, ויש לנו (x_0, y_0). ידוע כי y צריך להיות לפי המשוואה לעיל, אך $x_{-1}, x_{-2} = 0$ ולכן $y_0 = a_0x_0$ ומכאן $a_0 = \frac{y_0}{x_0}$ (תמיד מוגדר מהדרת x_0 בראשון שהוא לא 0). נמשיך:

גם כאן המכנה מוגדר טוב - $y_1 = a_0x_1 + a_1x_0 + 0 = \frac{y_0}{x_0}x_1 + a_1x_0 \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0x_1}{x_0}$

$$y_2 = a_0x_2 + a_1x_1 + a_2x_0 \Rightarrow a_2 = \frac{y_2 - a_0x_2 - a_1x_1}{x_0}$$

אז בעיה זו היתה קלה, אבל תחת הנתונים הנ"ל. נכתוב את משוואות y_i בצורה וקטורית:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_0 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

וקטור y הוא מטריצת הקלטים כפול וקטור המקדמים של המסנן. כמו כן, מלבד העובדה שזו מטריצה משולשית תחתונה, האלכסונים שלה מחזיקים את אותו ערך לאורך כל האלכסון – מטריצה <u>טפליצית</u> (מלשון טפליץ).

<u>בעיה נוספת</u>:

נתון לנו מסנן *MA* עם שלושה מקדמים אך הסיגנל לא אפס. במקרה זה נכתוב את המשוואות ונראה כיצד פותרים: המשוואה הכללית היא:

$$y_n = a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$$

למציאת פתרונות צריך 3 משוואות. אז נשלים עוד 2 משוואות, ונתחיל ב-*N* כלשהו:

$$y_{n+1} = a_0x_{n+1} + a_1x_n + a_2x_{n-1}$$

$$y_{n+2} = a_0x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_2x_n$$

סה"כ היינו זקוקים להתבוננות ב-5 זמנים שונים. נכתוב את המשוואות בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n & x_{n-1} & x_{n-2} \\ x_{n+1} & x_n & x_{n-1} \\ x_{n+2} & x_{n+1} & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

וזו גם מטריצה טפליצית. מדוע מטריצה טפליצית עוזרת לנו? כדי לפתור את המשוואות לבצע היפוך מטריצה. זאת ניתן לעשות ב-$O(n^3)$ ואף ב-$O(n^{2.72}\ldots)$. אבל, יש מטריצות מסויימות שניתן להפוך אותן בפחות, מטריצות עם תכונות המקלות על ההיפוך. טפליץ הוכיח שהיפוך מטריצה טפליצית היא ב-$O(n^2)$. במקרה זה קל להפוך את המטריצה ואז למצוא את המקדמים.

משוואות אלו נקראות <u>משוואות וינר-הופף</u>: הטריק לפתרונן הוא המטריצה הטפליצית לעיל.

<u>בעיה קשה עוד יותר</u>:

נתון מסנן AR עם שלושה מקדמים: $y_n = x_n + b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + b_3 y_{n-3}$. ניזכר כי מסנן AR תלוי ב-x_n ושלושה פלטים אחורה (במקרה זה). שוב יש שלושה נעלמים, ונצטרך 3 משוואות, כשהשתיים הנוספות:

$$y_{n+1} = x_{n+1} + b_1 y_n + b_2 y_{n-1} + b_3 y_{n-2}$$

$$y_{n+2} = x_{n+2} + b_1 y_{n+1} + b_2 y_n + b_3 y_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{n-1} & y_{n-2} & y_{n-3} \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} \\ y_{n+1} & y_n & y_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$Y = X + Yb \Rightarrow b = Y^{-1}(Y - X)$$

ומכאן שגם במקרה ה-AR ניתן לפתור כי המטריצה היא טפליצית. משוואות אלו הן <u>משוואות *Yule-Walker*</u> – המשוואות שצריך לפתור כדי למצוא את המקדמים בבעית זיהוי המערכת הקשה כאשר ידוע שהמסנן הוא AR.

בפועל הקלטים והפלטים הם עם רעשים, ולכן יש להשתמש בקורלציה של המשוואות, כאשר הסימון הוא R_{xy} למשל עבור $\sum_l x_l y_{l+m}$ (קורלציה - הפוך מקונבולוציה).

<u>מקרה נוסף</u>:

מה קורה עם מסנן $ARMA$ כללי? המטריצה תצא לא טפליצית, ולכן קשה לפתור באופן פרקטי בעיה זו. לכן רוב המסננים במאמרים ב-DSP הם MA או AR ולא $ARMA$.

- מסנני MA הם מסנני FIR
- מסנני AR או $ARMA$ הם מסנני IIR

אם נסתכל על תדרים: $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$ ואז לכאורה ניתן להסתכל על Y, X ולמצוא את H, אך X הרבה פעמים 0 ולכן זה בעייתי.

<u>טרנספורם ה-*Z*</u>:

Generating function – פונקציה יוצרת: עבור סדרה $s_0, s_1, s_2, \ldots$ מגדירים את הפונ' היוצרת: $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ - הפונקציה מיוצגת ע"י טור טיילור שמקדמיו הם הסדרה. נסתכל על דוגמת סדרת פיבונצ'י:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \Rightarrow$$

$$[f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \cdots]$$

$$\Rightarrow f(x) - 1 - x = x \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = x(f(x) - 1) + x^2 f(x) \Rightarrow$$

$$f(x) - 1 - x = xf(x) - x + x^2 f(x) \Rightarrow f(x)(1 - x - x^2) = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

מתקבל השרטוט הבא: **שרטוט 6**

האסימפטוטות של הפונקציה הן $-\gamma$, $\frac{1}{\gamma}$ עבור $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots$. כאשר משווים את הפונקציה שקיבלנו להתחלה מקבלים נוסחא מפורשת:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\gamma^{n+1} - \left(\frac{1}{\gamma} \right)^{n+1} \right)$$

<u>טרנספורם Z</u>:

רוצים פונקציה יוצרת שתעבוד על אות ספרתי. אות ספרתי הוא כזכור על $-\infty < n < +\infty$ בניגוד לסדרות רגילות שמתחילות ב-0. אם כן:

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n}$$

פונקציה זו בניגוד לסדרות רגילות היא מעל $\mathbb{C}$. $S(z)$ הוא טרנספורם z – לוקח סדרה ועושה ממנה פונקציה.

רוצים לעשות *z-transform* של $y = \hat{z}^{-1}s$:

$$S(\hat{z}^{-1}s) = z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{n-1}z^{-n} = z^{-1}S(z) \Rightarrow$$

$$zT(\hat{z}^{-1}s) = z^{-1} \cdot zT(s)$$

כאשר zT הוא ה-*z-transform*. נשים לב שבאגף שמאל z^{-1} הוא מספר.

נסתכל על המישור המרוכב: **שרטוט 7**. zT הוא הכללה של טרנספורם פורייה – שמוגדר רק על מעגל היחידה. zT מוגדר לא רק על מעגל היחידה. לכן יש צורך ב-zT, עבור המקרים בהם טרנס' פורייה לא קיים/מוגדר. הוא תמיד יהיה מוגדר על טבעת. אם אזור ההתכנסות מכיל את מעגל היחידה, טרנס' פורייה קיים, ואם לא, zT בלבד קיים.