DSP שיעור #6

תזכורת לפעם שעברה:

סוגי מסננים:

FIR	MA
IIR	AR $ARMA$

עד כה ראינו 3 דרכים שונות לאפיון מסנן, כלומר לכל x נדע מה ה-y:

1. מקדמים a_l, b_l במשוואה: $y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l} + \sum_{m=1}^{M-1} b_m y_{n-m}$ (או α_l, β_m).
2. תגובה להלם IR $\{h_l\}$ - אם המסנן הוא קוזאלי, אז h_l ל-l שליליים הוא 0, עבור $l = 0$ מקבלים 1 ו-$y_n = \sum_{l=0}^{\infty} h_l x_{n-l}$.
3. תגובה לתדר FR $\{H_k\}$ – ע"י פירוק הקלט לאקספוננטים מרוכבים ניתן לגלות את משוואת y_n.

<u>טרנספורם z: $X(z)$</u>: פונקציה מעל המישור המרוכב: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n}$. זו הרחבה של המושג של טרנספורם פורייה – שהוא הסתכלות על מעגל היחידה בלבד.

ננסה כעת לפתור את הבעיה הקשה של זיהוי מערכת: בהיתן קופסא שהיא מסנן, ויש קלטים ופלטים, צריך למצוא את הפונקציה המייצגת את המערכת ע"י טרנספורם z. נתחיל מהמשוואה של התגובה להלם:

$$y_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{n-l} \Rightarrow Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_n \sum_l h_l x_{n-l} z^{-n} = \sum_l \sum_n h_l x_{n-l} z^{-n} = \sum_l h_l \sum_n x_{n-l} z^{-n} =$$
$$= \underbrace{\sum_l h_l z^{-l}}_{=H(z)} \cdot \underbrace{\sum_n x_n z^{-n}}_{=X(z)} = H(z) \cdot X(z)$$

ואם נציב במעגל היחידה נקבל טרנספורם פורייה ונקבל את נוסחת המסנן:

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

ואז:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

ומציאת $H(z)$ היא פתרון הבעיה (פתרון 4).

$$\sum_l \alpha \cdot x_{n-l} = \sum_m \beta_m y_{n-m} \Rightarrow \sum_n \sum_l \alpha \cdot x_{n-l} = \sum_n \sum_m \beta_m y_{n-m} \Rightarrow \sum_l \alpha_l \sum_n x_{n-l} z^{-n} = \sum_m \beta_m \sum_n y_{n-m} z^{-n} \Rightarrow$$
$$\underbrace{\sum_l \alpha_l z^{-l}}_{=A(z)} \sum_n x_n z^{-n} = \sum_m \beta_m z^{-m} \sum_n y_n z^{-n} \Rightarrow A(z) \cdot X(z) = B(z) \cdot Y(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot X(z)$$

כלומר $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$ כאשר האגף השמאלי הוא יחס בין שני פולינומים – פונ' רציונאלית.

מהמשפט היסודי של האלגברה: $\sum \alpha_l z^{-l} = \prod_l (z - \xi_l)^{k_l}$ - מכפלת $z - root$. אם כן:

$$H(z) = \frac{\sum \alpha_l z^{-l}}{\sum \beta_m z^{-m}} \underset{assume\ m=l}{=} \frac{\prod_l (z - \xi_l)}{\prod_m (z - \pi_m)}$$

כאשר המונה הוא "אפסים" והמכנה "קטבים".

משפט:

פונקציה ראציונלית נקבעת באופן חד-ערכי ע"י האפסים והקטבים עד כדי הכפלה בקבוע (משפט על פונקציות מרוכבות).

מכאן פתרון (5): אפסים וקטבים (למציאת $H(z)$).

אם המסנן הוא MA אז יש α ואין β, ולכן הפונקציה הראציונאלית היא מהצורה: $\frac{\sum \alpha_l z^{-l}}{1}$ - יש אפסים ואין קטבים. לכן MA נקראת גם *all-zero*. אם המסנן הוא AR זה בדיוק הפוך – יש קטבים ואין אפסים, ולכן נקראת גם *all-pole*. אם יש גם וגם זהו מסנן *ARMA – pole-zero*. קיבלנו:

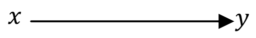
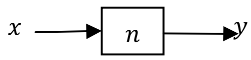
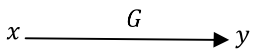
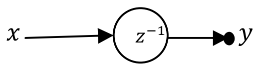
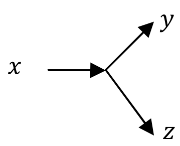
FIR	*MA*	*All zero*
IIR	*AR*	*All pole*
	ARMA	*Pole-zero*

זהו אפיון מלא של כל סוגי המסננים. כמו כן ברשותינו כל הדרכים השונות לאפיון מסנן (סה"כ 5 כמפורט לעיל). אך מהי המשמעות של האפסים והקטבים? להשלים ממישהו אחר...

מה קורה אם שמים אפס על מעגל היחידה על ציר ה-x ב-0 מעלות? זה סיגנל ה-*DC*; ב-180 מעלות? הסיגנל הגבוה ביותר האפשרי.

נושא חדש: תורת הגרפים ב-*DSP*

נסתכל על גרפים מכוונים בלבד, ונתייחס לקבוצת הצמתים כ"נקודות" וקבוצות הקשתות כ"קווים". הנקודות יציינו סיגנלים והקווים יהיו מערכות לעיבוד אות.

דוגמא פשוטה להתחלה: בדוגמא זו מתקיים: $x = y$	
	
סימון הגברה. הערה: ה-G צריך להיות ליד החץ.	
כאן $y = z^{-1}x$ הסימון של הנקודה השחורה ליד ה-y משמעותו תהליך עם זיכרון. אחרי z^{-1} תמיד נשתמש בנקודת זיכרון.	
כאן $y = x, z = x$	
כאן: $z = x + y$ אם נשים "-" ליד העיגול זה יהיה מחסר ולא מחבר הכיווניות חשובה, כמובן