סיכומים למבחן בקורס DSP

סמסטר א׳ תש״ע 2009-10 (ד״ר יעקוב שטיין)

מושגים:

- DTMF – צליל חיוג מקשים; כאשר פקס מחייג הוא מחייג במרווחים קבועים, וקליטת אותות החיוג בנפרד מוגבלת ל-10 חיוגים בשניה.
- CNG – sin ב-1100 הרץ שמפיק פקס מחייג כדי להזדהות בפני מי שאליו מתקשר כפקס.
- Answer tone – sin ב-2100 הרץ שמשמיע הצד העונה לפיו יודע הצד המחייג להפסיק את ה-CNG. ה-2100 גם מבטל את מבטלי ההדים כדי לשמור על תגובה מהירה (מבטלי הדים משמשים לתקשורת לווינית בה ה-delay גבוה).
- Hand shake – העברת המידע הראשונית בין הפקסים לאחר ה-answer tone: תחילה המחייג מעביר מידע על יכולותיו למשיב (קצב שליחה, גודל עמוד וכו׳), ולאחר מכן המשיב מחזיר לו פקודות בהתאם ליכולותיו.

מושגים חשובים:

<u>אפנון</u>: modulation: שינוי סיגנל כך שישא אינפורמציה ויעביר אותה למקום אחר.

<u>אות אנלוגי</u>: $S(t)$ היא פונקציה **ממשית** המוגדרת לכל זמן $-\infty < t < \infty$ בעלת התכונות:

- אנרגיה סופית.
- רוחב סרט סופי.

<u>אות ספרתי (דיגיטלי)</u>: s_n היא סדרה המוגדרת לכל זמן בדיד $n = -\infty, \dots, \infty$. גם כאן האות חייב להיות בעל אנרגיה וטווח סופיים.

<u>אנרגיה של אות</u>: חוזק וגודל האות, כמה עולה לחולל אותו. חישובים לאותות אנלוגיים וספרתיים:

- אנלוגי: $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$
- ספרתי: $E_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2$

<u>רוחב סרט של אות</u>: כמה האות משתנה; אם לא משתנה הרוחב הוא 0.

כל ציון של אות ע״י ייצוג מהצורה $A \cdot \sin \omega t$ כוונתה לאות זה בקטע סופי מסויים, שלפניו ואחריו האות הוא אפס (אחרת האות אינו סופי). ניתן לבצע חישובים מרוכבים על אותות לשם פישוט המתמטיקה, אך כמובן שאות הוא ממשי בלבד.

<u>בדיקה האם משהו הוא סיגנל או לא</u>: לבדוק האם האנרגיה והטווח שלו סופיים, לרוב ע״י בדיקה האם מתוחמים בפרק זמן סופי.

דוגמאות לסוגי סיגנלים:

<u>סיגנל DC</u>: סיגנל קבוע; למשל $\forall n. s_n = k$. כל סיגנל שהממוצע שלו <u>אינו</u> 0, יש לו רכיב DC, למשל $a + b \cdot \sin \omega t$ הוא בעל רכיב DC a.

<u>סיגנל מדרגה</u>: מסומן $\theta(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$.

<u>סיגנל קרונקר</u>: $\delta_{n,0} = \begin{cases} 0, n \neq 0 \\ 1, n = 0 \end{cases}$. זהו סיגנל מתקף היחידה – UI (unit impulse).

דגימה:

- לקיחת דגימות של סיגנל אנלוגי וליצור מהן סיגנל דיגיטלי.
- לא כל סיגנל דיגיטלי הוא תוצר של דגימת סיגנל אנלוגי.
- <u>תדר הדגימה</u>: לרוב הדגימה תעשה בקצב קבוע שהוא תדר הדגימה.

<u>משפט לייקוסט / משפט הדגימה</u>:

אם הדגימה מהירה יותר מספקטרום התדרים של הסיגנל, אז ניתן לדגום סיגנל אנלוגי ולהפכו לדיגיטלי כך שניתן יהיה לחזור לאנלוגי באופן חד ערכי.

עוד מאפיינים לסיגנלים:

- <u>סיגנל דטרמיניסטי</u>: סיגנל שניתן לנבא את ערכו בזמן מסויים. למשל: $s(t) = \sin t$.
- <u>סיגנל סטוכסטי</u>: סיגנל שלא ניתן לנבא את ערכו. סיגנל הרעש (רעש לבן) הוא הסיגנל הסטוכסטי ביותר, ומרכיב הסטוכסטיות הוא אינפורמציה.

סיגנל יכול להיות בעל רכיבים דטרמיניסטיים, כמו רכיבי סינוס, שלא נושאים אינפורמציה וניתנים לניבוי, ובעל רכיבים סטוכסטיים.

<u>סיגנל מחזורי</u>: סיגנל דטרמניסטי המקיים:

- אנלוגי: $\exists T. \forall t. s(t + T) = s(t)$
- דיגיטלי: $\exists N. \forall n. s_{n+N} = s_n$

כאשר N / T הקטן ביותר המקיים זאת שאינו 0 הוא **המחזור** ו-$\frac{1}{T}$ / $\frac{1}{N}$ הוא **התדר**. סיגנל סטוכסטי לא יכול להיות מחזורי, אחרת היה ניתן לניבוי.

<u>סגירות לחיבור וכפל בסקאלר</u>:

אם $x^{(i)}$ הם k סיגנלים ו-a_i הם k סקאלרים אז $y = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ הוא גם סיגנל, או באופן פורמלי:

- אנלוגי: $\forall t. y(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^{(i)}(t)$
- דיגיטלי: $\forall n. y_n = \sum_{i=0}^{k} a_i x_n^{(i)}$

<u>הגבר</u>:

אם $y = a \cdot x$ ו-$a > 1$ אז y הוא הגבר של x כאשר האנרגיה של האות y גדלה בריבוע לעומת האנרגיה של האות x (משיקולי אנרגיה: $E_x = a^2 E_Y$).

אם $a < 1$ נאמר כי y הוא מנחת, שכן האות "מוקטן". אם $a < 0$ אז בהתאמה לטווח שלו ($-1 < a < 0$ או $a < -1$) האות היה מתהפך ומונחת / מוגבר.

אופרטור הקידום והפיגור בזמן:

- $\hat{z}$ הוא אופרטור הקידום בזמן, המקבל אות ומוציא אות: $y = \hat{z}x$. שרטוט: $x \to \boxed{\hat{z}} \to y$; מוגדר רק לסיגנלים ספרתיים כך: $\forall n. y_n = x_{n+1}$.
  אופרטור זה ניתן למימוש **רק עבור אותות דטרמיניסטיים**.
- $\hat{z}^{-1}$ הוא אופרטור הפיגור בזמן כך ש-$y = \hat{z}^{-1}x$ משמעו $\forall n. y_n = x_{n-1}$. מתקיים: $x = \hat{z}\left(\hat{z}^{-1}(x)\right) = \hat{z}^{-1}\left(\hat{z}(x)\right)$. ניתן למימוש גם עבור אותות דטרמיניסטיים וגם עבור סטוכסטיים, אך **דורש זיכרון**.

<u>אופרטור קוזאלי</u>: אופרטור המשתמש בזיכרון (כמו $\hat{z}^{-1}$).

מרחב הסיגנלים כמרחב וקטורי:

כיוון שמרחב סיגנלים מקיים תכונות מרחב וקטורי (קיים סיגנל ה-0, לכל סיגנל x קיים הופכי ביחס לחיבור שהוא $-x$, סגירות לסכום וכו'), מרחב הסיגנלים האנלוגיים ומרחב הסיגנליים הדיגיטליים מהווים שני מרחבים וקטוריים (שונים).

<u>בסיס למרחב הסיגנליים</u>:

משפט: לכל מרחב וקטורי קיים (לפחות) בסיס אחד, הפורש את המרחב ומהווה קבוצה בת"ל והוא בעל ייצוג יחיד.

- בסיס למרחב הסיגנלים הדיגיטליים – הלמים מוזזים – shifted UI: $SUI^k = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0, n \neq k \\ 1, n = k \end{cases}$ עבור k כלשהו. כל סיגנל דיגיטלי יכול להיות מיוצג ע"י צירוף לינארי של בסיס זה: $x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot SUI^k$.
- בסיס מרחב הסיגנלים הדיגיטליים הוא $\aleph_0$ (בן מניה) ושל מרחב הסיגנלים האנלוגיים הוא $\aleph$.

משפט פורייה:

כל פונקציה מחזורית ניתנת לחישוב כסכום משוקלל של סינוסים וסכום משוקלל של קוסינוסים: $f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin l\omega t + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos l\omega t$, כאשר $\omega = 2\pi f = 2\pi\left(\frac{1}{T}\right)$ - המרת התדר לרדיאנים כקלט לפונ' הסינוס או הקוסינוס, רדיאנים לשניה. לפי משפט זה הקבוצה $\{\sin l\omega t\} \cup \{\cos l\omega t\}$ עבור כל l היא בסיס למרחב הפונקציות המחזוריות (פורשת אותו ובת"ל, כי המכפלה הפנימית של כל הרכיבים היא 0).

<u>טרנספורם פורייה</u>:

כיוון שמשפט פורייה מתאים רק לפונ' מחזוריות, ניתן להסתכל על פונקציה שאינה מחזורית כפונקציה בעלת מחזור אינסוף. נשים לב שככל שהמחזור גדול יותר, כך התדר קטן יותר ויש צורך ביותר ויותר קווים על ציר הזמן לתיאור הסיגנל. הפונקציה השלמה בעלת מחזור ∞ היא <u>טרנספורם פורייה</u>, והיא הצגת הסיגנל **בציר התדר במקום בציר הזמן**. (טרנספורם: פעולה על מתמטית על משהו מסוג מסויים היוצרת משהו אחר מאותו סוג). סימון:

- סיגנל אנלוגי: עבור הפונקציה $s(t)$ טרנספורם הפורייה יהיה $S(\omega)$.
- סיגנל דיגיטלי: עבור הסדרה s_n טרנספורם הפורייה יהיה S_k.

מתקיים: $f(t) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l \sin l\omega t + \sum_{l=0}^{\infty} b_l \cos l\omega t$ או פשוט: $f(t) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \cdot \sin(l\omega t + \varphi_l)$ עבור $c_l = \sqrt{a_l^2 + b_l^2},\ \ \varphi_l = \tan_4^{-1}\frac{a_l}{b_l}$.

ואם נשתמש במרוכבים, כאשר $\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right), \cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)$ נקבל: $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l \cdot e^{il\omega t}$ כאשר d_l מספר מרוכב (נסתכל רק על החלק הממשי).

<u>בסיסים בהם יעשה שימוש בנוסף ל-SUI</u>:

- סיגנלים אנלוגיים: $e^{i\omega t}$.
- סיגנלים דיגיטליים: $e^{i\omega n}$.

<u>מעבר לייצוג לפי טרנספורם פורייה</u>:

עבור סיגנל דיגיטלי DFT (טרנספורם פורייה הדיגיטלי) הוא המעבר מ-$x = \sum_n s_n SUI^n$ ל-$x = \sum_k S_k e^{ikn}$. הכיוון ההפוך הוא iDFT. עבור סיגנלים אנלוגיים: FT ו-iFT. מתקיים אם כך:

- $s_n = iDFT\big(DFT(s_n)\big) = iDFT(S_k)$
- $s(t) = iFT\left(FT\big(s(t)\big)\right) = iFT\big(S(\omega)\big)$

מספר דרגות החופש l נשמר במעבר, וכל האינפורמציה נשמרת. המעבר ע״י טרספורם פורייה הוא מציר הזמן לציר התדר.

ספקטרום:

טווח הצבעים המתקבל כאשר אור לבן עובר דרך פריזמה (מנסרה אופטית). האור הצבעוני הוא טרנספורם פורייה של האור הלבן (אור לבן מכיל את כל הצבעים בו באותה אנרגיה).

<u>דגימה</u>: מעבר מסיגנל אנלוגי לדיגיטלי נעשה ע״י דגימת הסיגנל האנלוגי בזמנים מסויימים, תהליך זה נקרא A/D (analog to digital).

משפט הדגימה:

נסתכל כל סיגנל אנלוגי בציר התדר, שהוא **הספקטרום של הסיגנל**. אם קצב הדגימה, f_s, הוא **פי 2 ומעלה** מהתדר המקסימלי בספקטרום, f, אז הדגימה לא מאבדת אינפורמציה. לפי משפט זה היחס המקסימלי $\frac{f}{f_s}$ יהיה לכל היותר $\frac{1}{2}$.

טרנספורם הילברט:

עבור סיגנל $x(t)$ ניתן לכתוב אותו באופן הבא: $x(t) = A(t)\cos\phi(t)$, כאשר:

- רוחב הסרט סופי.
- אין רכיב DC, כלומר הממוצע לאורך הזמן הוא 0.

$A(t)$ היא המשרעת/ אמפליטודה ו-$\phi(t)$ היא הפאזה (התדר הוא הנגזרת שלה).

<u>דוגמאות לאפנון (modulation)</u>:

- רדיו AM: amplitudes modulation – אפנון של האמפליטודה: הסיגנל הבסיסי הוא $\cos\omega_{RF}t$, ונעשה עליו אפנון ע״י הכפלה ב-$A(t)$, והסיגנל המאופנן הוא זה שמשודר. היעד הקולט מבצע היפוך כדי למצוא את הגל המקורי.
- רדיו FM: frequency modulation – אפנון בו האמפליטודה קבועה והפאזה משתנה (יותר נכון לקרוא לזה PM): $A(t)\cos[2\pi f_{RF} + \phi(t)]$. כיוון שהתדר הוא נגזרת של הפאזה, בשידור PM וקליטת FM מבצעים אינטגרל על מה שנקלט.

<u>חזרה לטרנספורם הילברט</u>:

טרנספורם הילברט מבצע: $y(t) = \hat{H}x(t) = A(t)\sin\phi(t)$. מציאת $A(t), \phi(t)$ של הילברט מתוך $x(t)$:

- $A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ (כי $x^2(t) + y^2(t) = A^2(t)\cos\phi(t) + A^2(t)\sin\phi(t) = A^2(t)$)
- $\phi(t) = \tan_4^{-1}\frac{y(t)}{x(t)}$ (הסימן מתוקן לפי סימני $x(t), y(t)$).

עקרון אי הודאות:

ניתן למדוד תדר סינוס ע״י חישוב מספר מחזורים חלקי הזמן בו מתקיימים. ככל שרואים סינוס טהור לאורך יותר זמן, כך ניתן יותר לדייק בתדר שלו. נסמן $\Delta\omega$ כאי דיוק בתדר ו-Δt זמן ההסתכלות על הסיגנל. עקרון אי הודאות: $\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi$.

<u>DTF ו-iDFT</u>:

עבור $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ נסתכל על $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}$ כאשר $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. W_N הוא שורש היחידה מדרגה N כי $W_N^N = 1$. לפי כללי דה-מואבר, בהכפלת שני מרוכבים מכפילים את האמפליטודה ומחברים את הפאזה; במקרה זה רק מחברים פאזות ולכן חיבור N פעמים יתן: $\frac{2\pi}{N}N = 2\pi$. אז:

- DFT: $X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n W_N^{nk}$
- iDFT: $x_n = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X_k W_N^{-nk}$

<u>**מערכות לעיבוד אותות**</u>:

מערכות שהקלטים והפלטים שלה הם סיגנלים. לרוב נסתכל על מערכות עם פלט וקלט יחיד. דוגמא: מערכת A/D.

מערכות עיבוד אותות עם קלט ופלט יחיד:

<u>מערכת לינארית</u>: מערכת המקיימת:

- אם עבור $x_1(t)$ מתקבל $y_1(t)$ ועבור $x_2(t)$ מתקבל $y_2(t)$ אז עבור $x_1(t)+x_2(t)$ מתקבל $y_1(t)+y_2(t)$.
- אם עבור $x_1(t)$ מתקבל $y_1(t)$ אז עבור $\alpha x_1(t)$ מתקבל $ay_1(t)$.

מגבר למשל הוא מערכת לינארית, ומערכת המחזירה סיגנל קבוע כלשהו תמיד היא דוגמא למערכת שאינה לינארית. גם המערכת $y=\hat{z}^{-1}x$ או $y=\hat{z}^{-k}x$ הן מערכות לינאריות.

<u>מערכת סיבתית</u>:

מערכת שלא צריכה "כדור בדולח" כדי לדעת לחשב את הערך, כלומר לא תלויה בסיגנלים עתידיים, אלא רק באלו שכבר היו: $y_n=f(x_o,x_1,\dots,x_{n-1},x_n)$. למשל, $y=\hat{z}x$ (אופרטור הקידום בזמן) אינה מערכת סיבתית כי $y_n=x_{n+1}$.

<u>מערכת אינווריאנטית כלפי הזמן</u>:

מערכת שעבור כל קלט תמיד מחזירה לו את אותו פלט ללא תלות בזמן (ב-t / n). למשל, $y_n=nx_n$ אינה אינוו' כלפי הזמן.

מסנן (פילטר):

מערכת לינארית ואינוו' כלפי הזמן היא מסנן. משמעות המסנן בתחום התדר היא שתדר שלא הוכנס למסנן לא יכול לצאת ממנו. דוגמאות למערכות שאינן מסננים:

- מערכת לא לינארית כמו $y(t)=x(t)+\varepsilon x^2(t)$ כאשר $x(t)=\sin\omega t$: נקבל בפלט גם x, גם DC וגם $\sin 2\omega$ - שני תדרים נוספים שלא נכנסו.
- מערכת לא אינוו' כלפי הזמן כמו $y(t)=e^{i?t}x(t)$: המערכת מזיזה את הספקטרום ב-?, כלומר מתקבלים תדרים אחרים.

<u>ייצוג</u>:

- אנלוגי: $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$
- דיגיטלי: $Y_k=H_k\cdot X_k$

דוגמאות למסננים:

- מסנן low-pass: מעביר רק תדרים נמוכים. למשל, כאשר אנו מדברים אנו נשמעים לעצמינו בעלי קול נמוך יותר מאשר אם אנו שומעים הקלטה של עצמינו, כי הקול עובר לאוזן דרך העצם המשמשת מסנן low-pass.
- מסנן high-pass: מעביר רק תדרים גבוהים. למשל, בהד החוזר במערה נשמעים תדרים גבוהים יותר מנמוכים, המערה היא מסנן high-pass.
- מסנן גוזר: $y=\frac{d}{dt}x$ (נגזרת היא פונ' לינארית ואינוו' כלפי הזמן).

<u>סימון למסנן</u>: $y_n=\sum_{l=0}^{L}a_lx_{n-l}$ - מבנה הסכום הוא קונבולוציה – סכום מכפלות שאינדקס אחד עולה והשני יורד כך שסכום האינדקסים הוא קבוע (לעומת קורלציה, כמו $\sum x_ny_n$).

<u>דוגמאות לקונבולוציות</u>:

נניח כי משודר סיגנל k קבוע אך מתקבל גם רעש: $x_n=k+\nu_n$. נסמן תוחלת סיגנל ע"י $<\cdot>$ וכיוון שאין ל-ν_n רכיב DC מתקיים: $<\nu_n>=0$. מכאן שאם נגדיר $y_n=\frac{1}{L}\sum_{l=0}^{L-1}x_{n-l}$, ומתקיים $<x_n>=<k>+<0>=k+0=k$ אז ניתן לרשום את y_n כך: $y_n=\sum_{l=0}^{L-1}a_lx_{n-l}$ וזו קונבולוציה (כאן $a_l\equiv\frac{1}{L},\forall l$). מיצוע על הרבה x-ים יקטין את הטעות על k.

קונבולוציה בציר הזמן ומכפלה בציר התדר:

קונבולוציה בציר הזמן $y_n=\sum_l h_lx_{n-l}$ המסומנת $y=h*x$ תהיה מכפלה בציר התדר: $Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$, ולהיפך.

מסננים:

<u>מסנן MA – moving average</u>:

יתכן שבסילוק רעש נפגע בסיגנל עצמו, ולכן ניתן למצע על מקטעים קטנים רציפים ע"י חלון נע. פתרון MA טוב כאשר השינוי בסיגנל הוא איטי, אך אם השינוי מהיר, נשתמש ב-MA משוקלל: ככל שהנקודה תהיה קרובה יותר למרכז החלון, כך המשקל שלה יהיה גדול יותר. ב-MA משוקלל ה-a_l כבר לא יהיו קבועים. מסנן MA הוא מסנן התלוי במספר **סופי** של x_i קודמים: $y_n=f(x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-L})$.

<u>מסנן AR - autoregressive</u>:

מסנן המקיים: $y_n=\alpha x_n+(1-\alpha)y_{n-1}$ (נסמן $\beta=1-\alpha$). נוסחה זו אינוו' כלפי הזמן כי α,β קבועים, וכמו כן מערכת זו לינארית.

<u>מסנן ARMA – בעל רכיבי MA ו-AR</u>:

מערכת מהצורה: $y_n = f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-L}; y_{n-1}, \dots, y_{n-M})$. ניתן לאמר כי החלק התלוי ב-y_i הוא חלק ה-AR (החלק הרקורסיבי), והחלק השני הוא חלק ה-MA. ובאופן כללי: $y_n = \underbrace{\sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}}_{MA\ part} + \underbrace{\sum_{m=1}^{M-1} b_m y_{n-m}}_{AR\ part}$.

- אם כל ה-b-ים הם 0, המסנן הוא מסנן MA.
- אם כל ה-a-ים פרט לראשון הם 0, המסנן הוא מסנן AR.

כל אחד מהחלקים בנפרד הוא קונבולוציה, וניתן לכתוב באופן סימטרי: $\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l x_{n-l} = \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m y_{n-m}$ (ע"י העברת אגפים והכנסת y_n לסכום על רכיבי ה-y_i; אם $L \neq M$ ניתן לרפד את הסכום הקטן יותר ע"י רכיבים עם מקדם 0).

<u>ייצוג ARMA ע"י אופרטור ההפרש הסופי הראשון</u>:

$\hat{\Delta} = 1 - \hat{z}^{-1}$ הוא אופרטור ההפרש הסופי, כאשר $y = \hat{\Delta}x$ מקיים $y_n = x_n - x_{n-1}$. לאופרטור זה תכונות כמו נגזרת:

- אם x סיגנל קבוע אז $\hat{\Delta}x = 0$.
- $\hat{\Delta}ax = a\hat{\Delta}x$.

ניתן להמשיך ולהסתכל על סדרת ההפרשים של סדרת ההפרשים, שהוא אופרטור ההפרש הסופי השני – $\hat{\Delta}^2$, בעל תכונות דומות לנגזרת שניה וכו'.

כל ייצוג סימטרי למסנן ה-ARMA ניתן להמיר לייצוג הפרשים: $\sum A_l \hat{\Delta}^L x = \sum B_m \hat{\Delta}^m y$.

גילוי מערכות:

בהינתן מערכת לא ידועה, קלט ופלט של אותה מערכת, נרצה לגלות מהי המערכת הזו. בזיהוי מערכות יש שני מצבים:

- המקרה הקל: ניתן להסתכל על אילו זוגות של קלט-פלט שנרצה.
- המקרה הקשה: נתונים לנו זוגות של קלט-פלט שלא אנחנו קבענו אותם.

כדי לזהות מערכת יש לדרוש שתהיה מסנן, כלומר לינארית ואינו' כלפי הזמן.

פתרונות אפשריים לבעיה הקלה:

אסטרטגיה ראשונה: הכנסת מתקף – הלם:

הכנסת קלט שהוא 0 בכל זמן פרט לנקודת זמן בודדת (נניח $n = 0$), שם הוא 1. תגובת המערכת היא IR – impulse response. יציאות אפשריות:

- אם המערכת היא ללא זיכרון, אז גם הפלט יהיה 0 בכל הזמנים פרט ל-$n = 0$.
- באופן כללי, אם המערכת סיבתית, נקבל תגובה החל מזמן $n = 0$.

<u>סוגים של מסננים לפי תגובה</u>:

- FIR – finite IR: מסנן שזמן סופי לאחר התגובה להלם, חוזרת תגובתו להיות 0.
- IIR – infinite IR: מסנן שלאחר התגובה להלם לעולם לא חוזר להיות 0.

<u>טענה</u>: IR מספיק לזיהוי המערכת. הסיבה לכך היא שהמערכת אינו' כלפי הזמן, ולכן ידיעת התגובה עבור זמן $n = 0$ מספיקה כדי לדעת את התגובה בכל זמן אחר (הזזה). כמו כן המערכת לינארית, ובסיס ה-SUI פורש את מרחב הסיגנלים (הדיגיטליים), ולכן כל אות ניתנת לייצוג כצירוף לינארי של SUI וכך ניתן לזהות את תגובת המערכת לכל דיגנל.

ל-FIR נזדקק למספר סופי של מקדמים, ל-IIR באופן עקרוני מספר אינסופי של מקדמים (יטופל בהמשך).

אסטרטגיה שניה: הכנסת סינוס:

כיוון שתדר סינוס יישמר בכל מסנן (יתכן מוגבר או מונחת, אך אותו תדר), ניתן לבדוק FR - frequency response:

- לוקחים כל תדר ובונים טבלת אמפליטודה ופאזה לפלט על אותו סינוס (A, ϕ). מה שהתקבל לכל תדר הוא אותו תדר רק מונחת/מוגבר ומוזז.
- לפי משפט פורייה כל סיגנל ניתן לכתוב כסכום משוקלל של סינוסים וקוסינוסים (פורשים את מרחב הסיגנלים) ולכן אם נפרק כל סיגנל לסכום נדע את הפלט על כל אחד מהגורמים בו. מלינאריות המסנן נדע מה קורה לסיגנל הכולל.

מכאן שתגובה לתדר מכילה גם כן את כל האינפורמציה הנדרשת כדי לאפיין את המסנן.

<u>הקשר בין IR ל-FR</u>: התגובה להלם המסומנת h_n בציר הזמן היא DFT של התגובה לתדר H_k בציר התדר (עבור אותות דיגיטליים), ולהיפך.

לכל מסנן יש ייצוג מהצורה: $y_n = \sum_l h_l x_{n-l}$ כאשר ה-h_i הם ה-IR. כיוון שקונבולוציה בציר הזמן היא מכפלה בציר התדר אז: $Y_k = H_k \cdot X_k$.

פתרונות אפשריים לבעיה הקשה:

<u>אם המערכת היא מסנן MA כשהקלט הוא כל הזמן 0 עד זמן מסוים</u>: הצורה הכללית היא $y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l}$, ונגדיר את הזמן הראשון בו הקלט אינו 0 כ-$n = 0$, ובנקודה זו רואים את x_0, y_0. אנו רוצים למצוא את a_i ולכן ניתן לכתוב את הבעיה בצורה וקטורית:

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ x_1 & x_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ x_{L-1} & x_{L-2} & \dots & x_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{L-1} \end{bmatrix}$$

המטריצה לעיל היא מטריצה משולשית תחתונה ומטריצה <u>טפליצית</u> (כל האלכסונים בה מכילים את אותו איבר לאורך האלכסון), וכדי למצוא את המקדמים a_i (ולאחר מכן את h_i: $h_i = \begin{cases} a_i, & 0 \le i \le L-1 \\ 0, & o/w \end{cases}$) יש למצוא את המטריצה ההופכית. מטריצה הופכית למט' טפליץ ניתן למצוא ב-$O(n^2)$.

<u>אם המערכת היא מסנן MA כשהקלט אינו 0 עד זמן מסויים</u>:

$$\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+L-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_{n-L+1} \\ x_1 & x_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_{n-1} \\ x_{n+L-1} & x_{n+L-2} & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{L-1} \end{bmatrix}$$

פתרון באותו אופן; משוואות אלו נקראות Wiener-Hopf.

<u>אם המערכת היא מסנן AR</u>:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ \vdots \\ y_{n+L-1} \end{bmatrix}}_{\bar{Y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+L-1} \end{bmatrix}}_{\bar{X}} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_n & y_{n-1} & \cdots & y_{n-L+1} \\ y_1 & y_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & y_{n-1} \\ y_{n+L-1} & y_{n+L-2} & \cdots & y_n \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{Y}}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{L-1} \end{bmatrix}}_{\bar{b}}$$

וזוהי שוב מטריצה טפליצית, ומציאת $\bar{b}$ ע"י: $\bar{Y} = \bar{X} + \bar{\bar{Y}} \cdot \bar{b} \Rightarrow \bar{b} = \bar{\bar{Y}}^{-1}(\bar{Y} - \bar{X})$. משוואות אלו נקראות משוואות Yule-Walker.

<u>הערות</u>:

- במשוואות אלו אין התייחסות לרעש בעת הדגימה, ולכן יש צורך במיצוע על כמה דגימות. מיצוע אינו פותר את בעית הרעש לאחר היפוך מטריצה, ולכן את המיצוע יש לעשות לפני פתרון מרכת המשוואות.
- לא לחשב בציר התדר את $H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$ כיוון ש-$X(\omega) = 0$ במקרים מסויימים.

<u>אם המערכת היא ARMA</u>: אם נחזור על תהליך זה כבר נקבל מטריצה שאינה טפליצית ופתרון הבעיה קשה.

סיכום ביניים:

- מסנני MA הם מסנני FIR.
- מסנני AR או ARMA הם מסנני IIR.

<u>פונקציות יוצרות</u>:

עבור הסדרה s_n, $S(x)$ היא פונקציה יוצרת של הסדרה כאשר $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n$ - טור טיילור שמקדמיו הם s_n. כך ניתן לקבל נוסחאות מפורשות עבור סדרות המוגדרות רקורסיבית.

<u>טרנספורם ה-Z</u>:

טרספורם Z מוגדר כך: $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n}$. הוא שונה מפונ' יוצרת בכך שהטור לא מתחיל מ-0 אלא מ-$-\infty$, חזקת z היא שלילית ופונ' זו מעל המרוכבים ולא הממשיים. זהו טרספורם Z, הלוקח סדרה והופך אותה לפונקציה (כלומר הוא לא באמת טרנספורם). תכונות:

עבור $y = \hat{z}^{-1}s$, חישוב טרנספורם Z: $\hat{z}^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n z^{-n} = \hat{z}^{-1} S(z) \underset{\text{הזזת אינדקסים}}{=} \underset{\text{מספר}}{\hat{z}^{-1}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{n-1} z^{-(n-1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{n-1} z^{-n} = S(\hat{z}^{-1}s)$.

כלומר: $zT(\hat{z}^{-1}s) = \hat{z}^{-1} zT(s)$, כאשר zT הוא סימון לטרנספורם Z.

<u>הערה</u>:

טרנספורם Z הוא הכללת טרנספורם פורייה על המרוכבים: אם נסתכל על מעגל היחידה כמישור ה-z, כל z עליו הוא מהצורה $z = e^{i\omega}$. סכום על כל שורשי היחידה: $\sum s_n z^{-n} = \sum s_n z^{-i\omega n}$ - טרנספורם פורייה. מכאן שטרנספורם פורייה הוא מקרה פרטי של טרנספורם Z על מעגל היחידה. טרנספורם Z יכול להיות מוגדר על טבעת כלשהי במישור המרוכב, בעוד פורייה מוגדר רק על מעגל היחידה.

פתרון הבעיה הקשה ע״י טרנספורם Z על תגובה להלם:

נתחיל ממשוואת התגובה להלם: $y_n = \sum_{l=-\infty}^{-\infty} h_l x_{n-l}$, ומכאן נפעיל את טרנספורם Z:

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l x_{n-l} z^{-n} = \cdots = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l z^{-l} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^{-n} = H(z) \cdot X(z)$$

הצבה במעגל היחידה תיתן את טרנספורם פורייה: $Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$, וכך נאפיין את המסנן. הפעלת טרנספורם Z על הקלט והפלט תמצא לנו את פונקציית התמסורת $H(z)$ המוגדרת: $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ומייצגת את המסנן. $H(z)$ היא טרנספורם ה-Z של h_l: $H(\omega) = \sum_l h_l e^{-iwl}$.

פתרון ע״י טרספורם Z על משוואת ההפרשים:

נתחיל ממשוואת ההפרש: $\sum_l \alpha_l x_{n-l} = \sum_m \beta_m y_{n-m}$ ונבצע טרנספורם Z על שני האגפים:

$$\sum_n \sum_l \alpha_l x_{n-l} z^{-n} = \sum_n \sum_m \alpha_m y_{n-m} z^{-n} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \sum_l \alpha_l z^{-l} \cdot \sum_n x_n z^{-n} = \sum_m \beta_m z^{-m} \cdot \sum_n y_n z^{-n}$$

וקיבלנו מכפלות של טרנספורם Z: $A(z) \cdot X(z) = B(z) \cdot Y(z)$ ומכאן $Y(z) = \frac{A(z)}{B(z)} \cdot X(z)$, ולפי הפתרון הקודם: $H(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$. כיוון ש-A, B מספר סופי של מקדמים קיבלנו פונ׳ רציונאלית. כיוון שתמיד קיים פירוק פולי׳ מעל המרוכבים, נקבל: $H(z) = \frac{\Pi_l (z-\lambda_l)}{\Pi_m (z-\pi_m)}$ כאשר λ_i הם **אפסים** ו-π_i הם **קטבים**. ומכאן שהאפסים והקטבים, הקובעים פונ׳ ראציונלית באופן חד ערכי, הם ייצוג נוסף למסנן.

סיכום דרכי ייצוג למסנן:

- המקדמים a_l, b_m ב-$y_n = \sum_{l=0}^{L-1} a_l x_{n-l} + \sum_{m=1}^{M-1} b_m y_{n-m}$ או α_l, β_m ב-$\sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l x_{n-l} = \sum_{m=0}^{M-1} \beta_m y_{n-m}$.
- IR – תגובה להלם $\{h_l\}$: $y_n = \sum_{l=0}^{\infty} h_l x_{n-l}$ (עבור l-ים שליליים $h_l = 0$).
- FR – תגובה לתדר $\{H_k\}$: $Y_k = H_k \cdot X_k$.
- פונקציית התמסורת $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ (מוגדרת ע״י טרנספורם פורייה על תגובה להלם).
- אפסים וקטבים מהם מוצאים את $H(z)$ באופן חד ערכי.

כאשר המסנן הוא MA יש אפסים אך אין קטבים, וכאשר המסנן הוא AR יש קטבים אך אין אפסים. לכן נקבל סיווג שלם למסננים:

FIR	*MA*	*All zero*
IIR	*AR*	*All pole*
	ARMA	*Pole-zero*

משמעות האפסים והקטבים:

פונקצית התמסורת תהיה ממשית אם שורשיה יהיו ממשיים או זוגות של מרוכבים צמודים.

- משמעות אפס על מעגל היחידה: התדר בנקודה בה יהיה 0 מסונן. למשל, 0 ב-$0°$ (ביחס לציר ה-x) משמעו סינון סיגנל ה-DC.
- משמעות קוטב על מעגל היחידה: הגדלת עוצמת התדר גדלה באותה נקודה.

ניתן לתאר זאת כרכבת הנעה במסלול שהוא מעגל היחידה. נקודות בהן יש אפס יוצרות עמק המתחיל מאותה נקודה ומתרחב לכיוון חוץ המעגל. ככל שהאפס יותר קרוב לראשית כך ה״עמק״ יהיה יותר רחב על המסלול, וככל שהוא יותר קרוב למעגל היחידה, כך הוא יהיה יותר ממוקד ומקומי. קטבים יהיו כמו הרים עם אותו מאפיין השפעה.

<u>תורת הגרפים ב-DSP</u>:

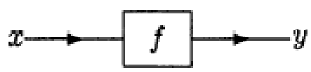
גרפים בתורת הגרפים הם גרפים מכוונים המורכבים מ:

- נקודות המציינות סיגנלים.
- קווים המציינים מערכות לעיבוד אותות.

דוגמאות:

סיגנל הזהות:

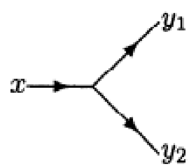
הפעלת f על הקלט: $y = f(x)$:



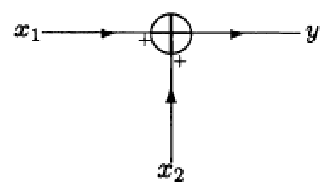
הגברה, או: $y = Gx$:

הסימן G צריך להיות ליד סימן החץ כדי לציין מגבר.

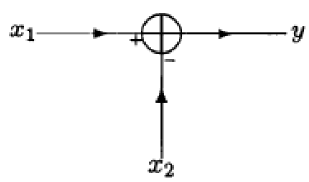
$x = y_1 = y_2$:



חיבור: $y = x_1 + x_2$:



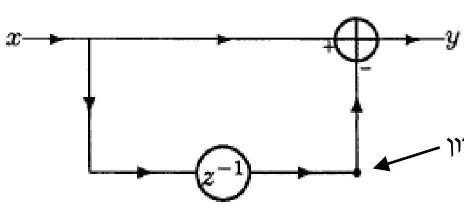
חיסור: $y = x_1 - x_2$:



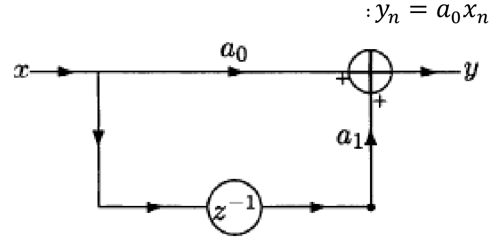
תהליך עם זיכרון: $y = \hat{z}^{-1}x$:

הנקודה ליד ה-y מציינת שזהו תהליך עם זיכרון. כדי לממש $\hat{z}^{-1}$ למשל זקוקים לזיכרון.

ההפרש הסופי הראשון: $y = \widehat{\Delta}x = x - \hat{z}^{-1}x$:

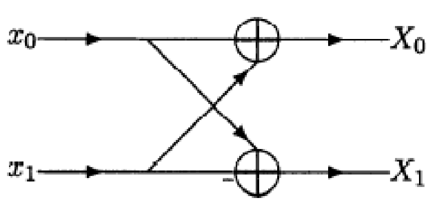


$y_n = a_0 x_n + a_1 x_{n-1}$:



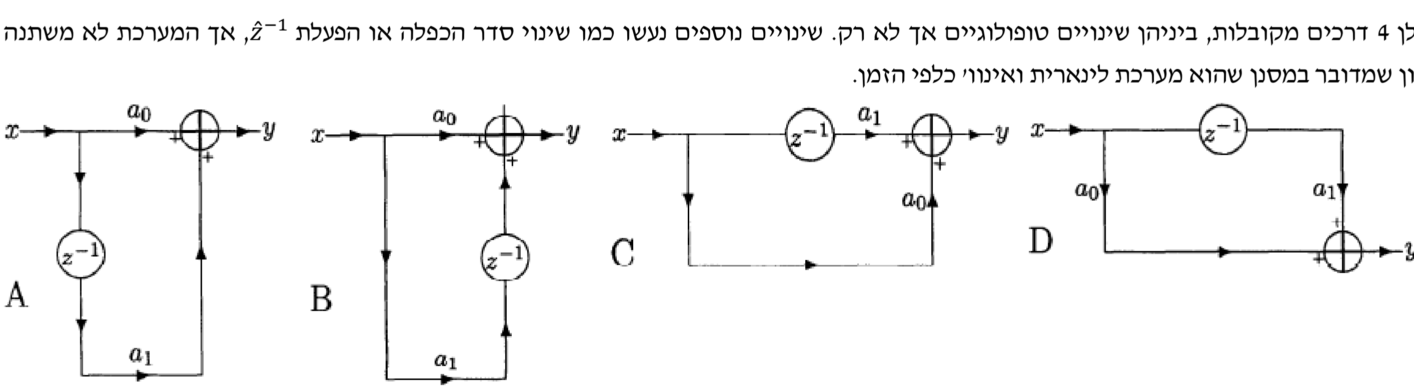
זהו מסנן MA פשוט בעל זיכרון אחד

DFT עבור $N = 2$:



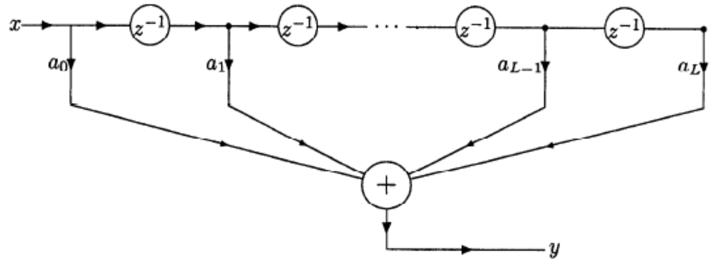
כאשר $X_0 = x_0 + x_1, X_1 = x_0 - x_1$

להלן 4 דרכים מקובלות, ביניהן שינויים טופולוגיים אך לא רק. שינויים נוספים נעשו כמו שינוי סדר הכפלה או הפעלת $\hat{z}^{-1}$, אך המערכת לא משתנה כיוון שמדובר במסנן שהוא מערכת לינארית ואינווי' כלפי הזמן.



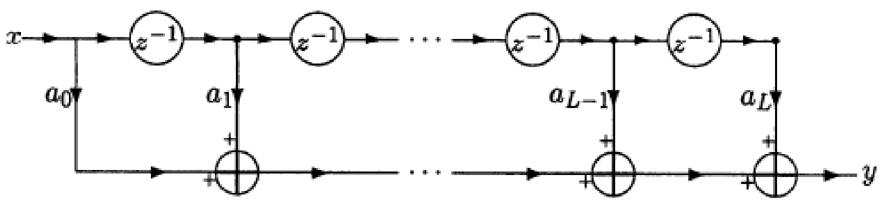
<u>משפט המסננים המתחלפים</u>: אם שתי מערכות הן מסננים, הן מתחלפות, כלומר, אם f, g מסננים אז $f(g(x)) = g(f(x))$. לא נכון אם לא מסננים.

מימוש גרף MA:



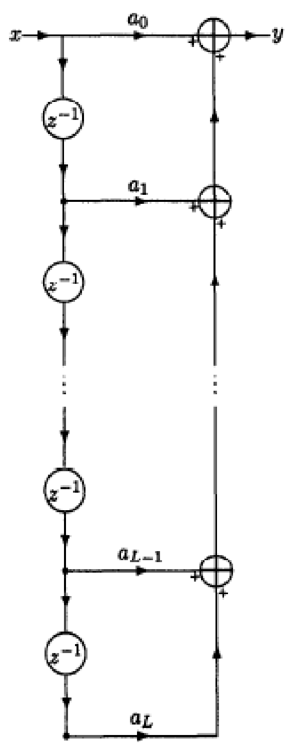
להלן מימוש ל-$y_n = \sum_l a_l x_{n-l}$:
(מימוש קונבולוציה כללית)

סדרת ה-$\hat{z}^{-1}$ הזו נקראת top-delayed line. מבנה הנתונים המוצג בגרף הוא FIFO – תור בו הראשון שנכנס הוא הראשון שיזרק.



כיוון שחיבור עם יותר משתי כניסות לא מוגדר, נממש באופן אחר:

ניתן לראות שמערכת זו מורכבת מרכיבי D חוזרים – <u>איטרציות</u> (לא רקורסיות, כיוון שזה MA) על D. שיטה זו היא MAC – multiply and accumulate – הכפלה וצבירה. פעולת ה-MAC הינה פעולה חשובה ב-DSP, ומעבדים המבצעים זאת ביעילות נקראים מעבדי DSP. כיוון שהגרף מכיל גם את המבנה (FIFO) וגם את האלגוריתם (איטרציות על רכיב D), הרי שהוא מכיל את כל האינפו׳ הנדרשת לבניית המערכת באופן חד ערכי. מימוש נוסף:



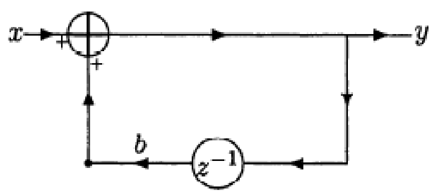
כאן המימוש הוא שונה בכך שהחיבור בסדר הפוך מאשר קודם. אין משמעות מתמטית, אך תתכן משמעות למימוש.

במקרה זה הרוטינה הבסיסית המרכיבה את המערכת היא A, והמבנה גם כאן הוא FIFO.

הערה חשובה:

בגרף <u>למסנן MA לעולם לא יהיו מעגלים (של חצים)</u>, מעגלים מעידים שהמסנן הינו AR.

מימוש גרף AR: (מסנן AR פשוט)



כאן משוואת המערכת היא: $y_n = x_n + b_1 y_{n-1}$. המעגל בגרף נקרא <u>משוב</u>. קיום מעגל בגרף מעיד על כך שיש <u>קוטב</u>.

לפיכך, מעגל בגרף מעיד שהמסנן בגרף אינו FIR=MA והפלט לעולם לא יחזור להיות 0.

סיכום טרנספורמציות שניתן לבצע על גרפים:

1. שינויים טופולוגיים (כמו הארכת חץ בין נקודה אחת לשניה).
2. החלפת סדר מסננים.
3. <u>משפט הטרנספוזיציה</u>.
4. אחת נוספת תפורט בהמשך.

משפט הטרנספוזיציה:

ביצוע 4 הפעולות הבאות על גרף נותנות גרף זהה פונקציונאלית:

א. החלפת מיקום בין inputs ל-outputs.
ב. הפיכת כל החצים.
ג. הפיכת כל המחברים להיות פיצולים.
ד. הפיכת כל הפיצולים להיות מחברים.

<u>ממה נובע הצפצוף כאשר מדברים למיקרופון והקול חוזר מהרמקול למיקרופון</u>:

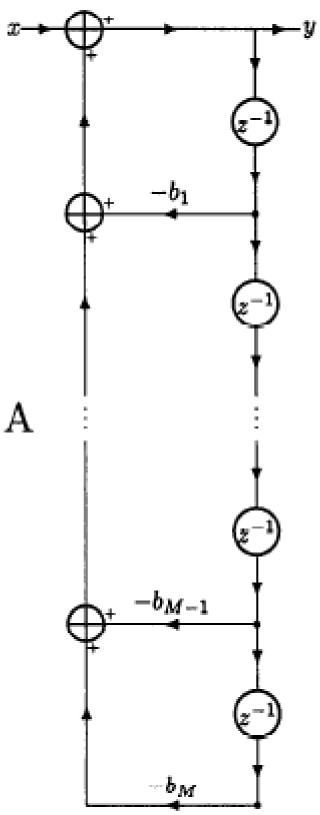
מהרמקול יוצא $y = a(x + \varepsilon y)$ כאשר ה-y בסוגריים הוא הקודם, לאחר השהיה מסויימת, ומכאן $y = \frac{a}{1-a\varepsilon} x$, ולכן אם $a\varepsilon = 1$ יש קוטב = פיצוץ.

מימוש גרף AR כללי:

נוסחה ל-AR כללי: $y_n = x_n + \sum_{m=1}^{M} b_m y_{n-m}$

מבנה זה הוא FIFO, וגם עבורו יש 4 דרכים שונות לציור (כמו ל-MA כללי).

AR:



מימוש גרף ARMA כללי:

נוסחה ל-ARMA כללי: $y_n = \sum_{l=0}^{L} a_l x_{n-l} + \sum_{m=1}^{M} b_m y_{n-m}$

תחילה הגרף יהיה מהצורה: $x \to \boxed{MA\ part} \to v_n \to \boxed{AR\ part} \to y$

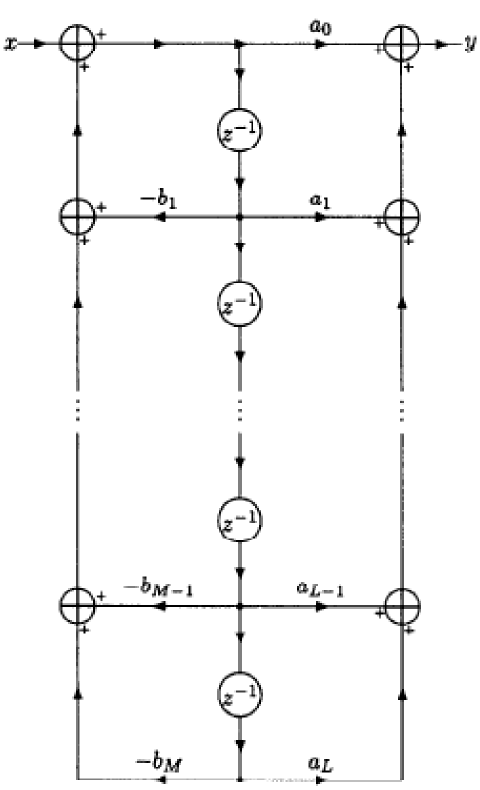
כאשר v_n הוא סיגנל הביניים. נניח בה"כ כי $M = L$. במימוש זה יש צורך ב-$2L$ נקודות זיכרון, אך ניתן לבצע טרנס' כך שנזדקק ל-L נקודות זיכרון בלבד:

- החלפת מיקום מסנן ה-MA עם מסנן ה-AR
- נסתכל על v_i סיגנל הביניים, מה שיושב בנקודת הזיכרון ה-i. נתייחס לנקודות הזיכרון במסנן ה-MA כ-MA_i ובמסנן ה-AR כ-AR_i ומתקיים: $AR_1 = y_{n-1} = v_{n-1} = MA_1$ (מימוש MA כהרכבת רכיבי A) וכן הלאה, כלומר ניתן לאחד את נקודות הזיכרון הללו ולחסוך זיכרון וחישובי z^{-1}.

<u>הגרף המתקבל</u>: זה מצד שמאל למטה.

ניתן להוכיח כי הגרף שהתקבל שקול אלגברית לגרף המקורי באמצעות פעולות אלגבריות מסובכות, מה שהיה קל להוכחה באמצעות תות הגרפים.

ARMA:



<u>נושא אחר: אלגוריתם ה-FFT: Fast Fourier Transform</u>:

עבור $x_0, \dots, x_{N-1}$ לא קיימים אלג' המוצאים min או max בפחות מ-$N-1$ השוואות. נאמר מעתה N השוואת כי זה שקול מבחינת סד"ג.

אם רוצים למצוא MIN ו-MAX יחד קיים אלג' ב-1.5N: מחלקים את הנתונים לזוגות, ובונים שתי קבוצות, אחת של כל הקטנים מתוך כל זוג והשניה של הגדולים מתוך כל זוג. בקבוצת הקטנים ימצא ה-min ובקבוצת הגדולים ימצא ה-max. מיון כל אחת מהקבוצות ופעולות ההשואה הראשונות לחלוקת כל זוג – סה"כ 1.5N פעולות השוואה.

חלוקה לקבוצות:

<u>Partition</u>: חלוקה לפי ה-MSB, למשל חלוקה לשתי קבוצות כאשר הראשונה עם MSB 0 והשניה עם MSB 1 – קבוצת קטנים וקבוצת גדולים, כמו לעיל.

<u>Decimation</u>: חלוקה לפי ה-LSB, למשל חלוקה לשתי קבוצות של זוגיים ואי זוגיים.

משפט:

דסימציה בציר התדר היא חלוקה בציר הזמן, ולהיפך.

<u>אלגוריתם Toom-Cook למכפלה</u>:

נסתכל על המכפלה $A_3A_2A_1A_0$ ב-$B_3B_2B_1B_0$ ונבצע עליה חלוקה לשתי קבוצות. מתקיים:

- $A = A_L \cdot 2^{N/2} + A_R$
- $B = B_L \cdot 2^{N/2} + B_R$

$$A \cdot B = \dots = \underbrace{A_L B_L}_{N^2/4\ mul}\left(2^N + 2^{N/2}\right) + \underbrace{(A_L - A_R)(B_L - B_R)}_{N^2/4\ mul}2^{N/2} + \underbrace{A_R B_R}_{N^2/4\ mul}\left(2^{N/2} + 1\right)$$

סה"כ: $\frac{3}{4}N^2$ פעולות במקום N^2 פעולות.

כל חלק ניתן לחלוקה בעצמו (שכן הוא מכפלה) לשלושה חלקים, וכל חלק חוסך עוד 25%, וכך מתקבל עץ חלוקה עד שבעלים המכפלה היא ספרה כפול ספרה. סה"כ נקבל מספר פעולות: $O\left(N^{\log_2 3}\right) = O\left(N^{1.585}\right)$. אלגוריתם ה-FFT טוב יותר מאלגוריתם Toom-Cook.

<u>חשיבות אלג' ה-FFT</u>:

אלגוריתם ה-FFT מבצע מכפלה ב-$O(N\log N)$, וכיוון שקונבולוציה בציר הזמן היא מכפלה בציר התדר, אז כל קונבולוציה ניתנת להעברה למכפלה בציר התדר ולפיכך לחישוב יעיל.

<u>אלגוריתם in-place</u>: אם נחזור לבעיית מציאת min-max, ניתן במקום לשמור שני מערכים חדשים בגודל $N/2$ כ"א, לעשות הכל בתוך המערך הנתון (הגדרת מיקומים זוגיים ל-min ואי זוגיים ל-max). אלג' כזה הוא in-place וחסכני בהקצאת זיכרון.

<u>הערה על חלוקה</u>: כאשר אלג' לוקח סיבוכיות בסד"ג עם חזקה גדולה מ-1 של N, למשל N^2, בחלוקה לשניים מקבלים $(N/2)^2+(N/2)^2=1/2\cdot N^2$ – מחצית מהעלות המקורית. יש להתחשב גם בעלות הפירוק לשני החלקים וההרכבה – אם אלו זולים, אזי החלוקה משתלמת.

אלגוריתמי זמן אמת:

- באלג' ז"א כמעט תמיד נרצה זמן ריצה של $O(N)$.
- <u>תנאי hard R.T.</u>: הוצאת פלט לכל קלט לפני הגעת הקלט הבא.
- <u>תנאי soft R.T.</u>: הוצאת פלט לכל קלט לפני הגעת הקלט הבא, <u>בממוצע</u>.

מערכות הזקוקות ליותר מקלט אחד כדי להוציא פלט, זקוקות ללבלוק דגימות – *buffer*. *Double buffering*: שימוש בשני באפרים המתמלאים לסירוגין; כאשר אחד מלא, מתבצע עליו החישוב ובינתיים השני מתמלא. במצב זה נתייחס לתנאי *hrt* כך: פלט צריך לצאת לפני שה-*buffer* השני (זה שלא עליו מתבצע החישוב) מתמלא. ניתן להשתמש גם ב-*buffer* ציקלי.

<u>התנאי הכללי ל-*hrt*</u>: הזמן שמקדישים לדגימה חייב להיות פחות מאשר הזמן בין שתי דגימות.

נסתכל על $DFT(s_n)=S_k=\sum_{n=0}^{N-1}s_nW_N^{nk}$ – חישוב טרנספורם פורייה הדיגיטלי, וחישובו לוקח N^2. נניח $N=32$, אם נגדיל ל-$N=64$, מספר הפעולות יגדל פי 4 ולא פי 2. אבל, אם נצליח לבצע את החישוב ב-$O(N)$, גם לאחר הגדלה נשאר ב-$O(N)$, לכן נשאף ב-*RT* לאלג' לינאריים. אמנם ה-*FFT* לוקח $O(N\log N)$ אך הוא לא גדול בהרבה מ-$O(N)$ (עבור N גדול מאוד תהיה בעיה).

אלגוריתם ה-*FFT*:

$X_k=\sum_{n=0}^{N-1}x_nW_N^{nk}$ כאשר $W_N=e^{-i\frac{2\pi}{N}}$. נשים לב כי מתקיים: $W_N^N=1, W_N^{\frac{N}{2}}=-1, W_N^2=W_{N/2}$. הפעולה ההופכית: $x_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_kW_N^{-nk}$.

כיוון שדסימציה בציר הזמן משרה חלוקה בציר התדר, ל-FFT שתי צורות:

- דסימציה בציר הזמן: DIT.
- דסימציה בציר התדר: DIF (= חלוקה בציר הזמן).

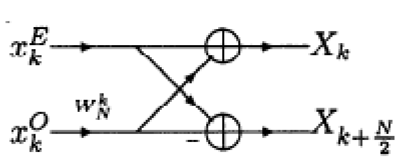
<u>הבחנות</u>:

<u>חלוקה</u>: נסתכל על כל X_k עבור $0\le k\le N-1$, ונבצע חלוקה. ונשים לב כי $X_{k+\frac{N}{2}}=\cdots=\sum_{n=0}^{N-1}x_n(-1)^nW_N^{nk}$ שזה אותו SOP רק עם $(-1)^n$.

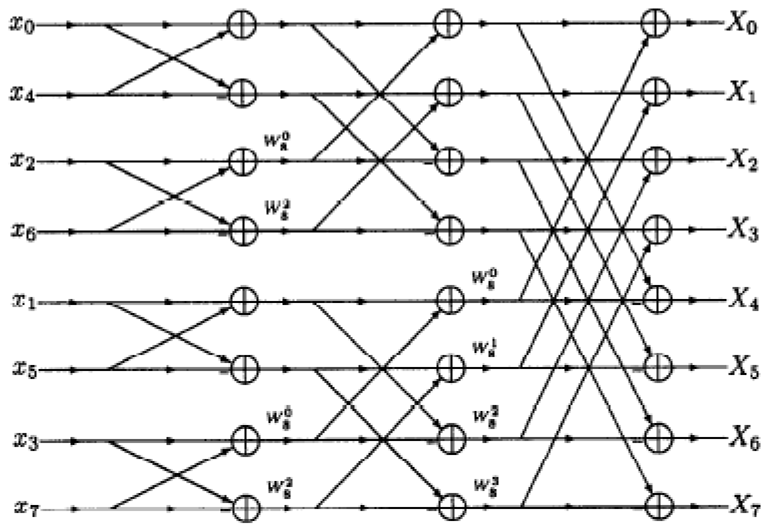
לאחר פירוט ה-DIT נבצע טרנספוזיציה ונקבל את ה-DIF.

<u>דסימציה – אלגוריתם ה-DIT</u>:

נבצע דסימציה על X_k להפרדת סכום מעל הזוגיים ומעל האי זוגיים, ונקבל כי $X_k=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_{2n}W_{N/2}^{nk}+W_N^k\cdot\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}x_{2n+1}W_{N/2}^{nk}$. נסמן את הסכום הראשון כ-X^E (זוגיים) והשני כ-X^O (אי זוגיים), ונקבל: $X_k=X^E+W_N^kX^O$. עבור $X_{k+\frac{N}{2}}$ מתקיים אותו דבר רק שסכום האי זוגיים שלילי: $X_{k+\frac{N}{2}}=X^E-W_N^kX^O$. שרטוט גרף עבור האחרון:



חישוב X_k^E נעשה גם כן בחלוקה ל-X_k^{EO}, X_k^{EE} וממשיכים בחלוקות אלו עד שמתקבל משהו מהצורה:



בדוגמא זו $N = 8$. בכל שכבה יש לנו $\frac{N}{2}$ מכפלות, וסה״כ יש $\log_2 N$ שכבות. סה״כ מכפלות: $\frac{N}{2}\log_2 N$, והחישוב הוא in-place.

<u>בחזרה ל-DIF</u>:

ב-DIF מסתכלים על החלוקה לשני הסכומים $\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1}\dots, \sum_{n=\frac{N}{2}-1}^{N-1}\dots$, ומתקבל משהו דומה ל-DIT רק שמכפלת ה-W עוברת להיות אחרי החיבור ולא לפניו, וממשפט הטרנספוזיציה בגרפים מתקבל גרף זהה פונקציונאלית. מכאן: טרנספוזיציה על DIT נותן DIF.

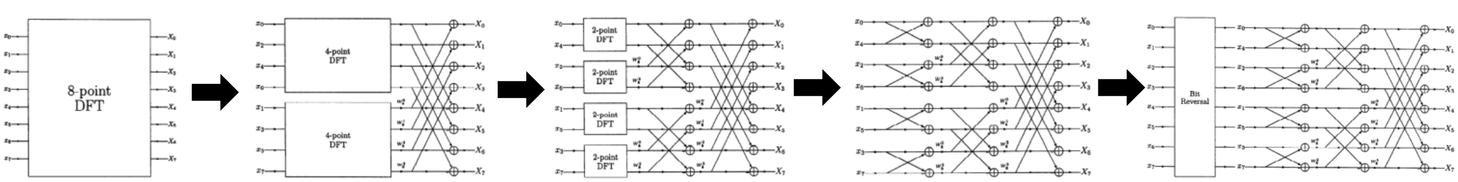
נסתכל על DIT-FFT על סדרה באורך 16:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
0	2	4	6	8	10	12	14	1	3	5	7	9	11	13	15
0000	0010	0100	0110	1000	1010	1100	1110	0001	0011	0101	0111	1001	1011	1101	1111
0	4	8	12	2	6	10	14	1	5	9	13	3	7	11	15
0000	0100	1000	1100	0010	0110	1010	1110	0001	0101	1001	1101	0011	0111	1011	1111
0	8	4	12	2	10	6	14	1	9	5	13	3	11	7	15
0000	1000	0100	1100	0010	1010	0110	1110	0001	1001	0101	1101	0011	1011	0111	1111

<u>הבחנות</u>:

- בכל טור נעשה shift-left ציקלי על הביטים.
- בכל שכבה נוסף lsb שנשאר קבוע וה-shift left הציקלי הוא על ה-MSB הנותרים.

לבסוף מתקבל <u>bit reversal</u>, ומכאן שיש לבצע בהתחלה bit reversal על ה-inputs לפני ביצוע ה-DIT. סה״כ:



הדוגמא הנ״ל היא עבור N שהוא חזקה של 2, אך למעשה לכל N שאינו ראשוני ניתן לבצע FFT, למשל סיגנל באורך 9 ניתן לחלק ל-3 תתי סדרות באורך 3 ולבנות FFT שהוא 3×3. הפירוק הוא לפי פירוק לגורמים של N (15 יכול להתפרק ל-3×5, 5×3). <u>אם N אינו ראשוני חייבים N^2 פעולות</u>.

ישנם עוד אלגוריתמים שונים לחישוב ה-FFT (FIFO FFT, Goertsel) שלא יפורטו כאן ולא נראה שהם חשובים.

מעבדי DSP:

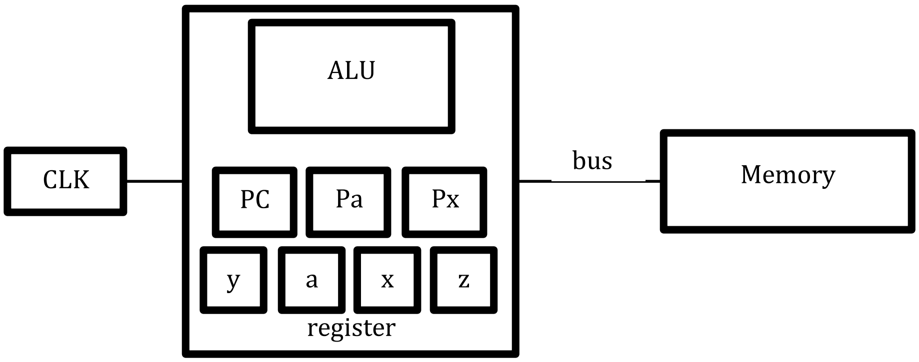
מעבדי DSP הם מעבדים המשמשים לחישובי DSP ויעילים עבור חישובים אלו, כלומר מבצעים באופן יעיל חישובי **MAC** – Multiply & Accumulate.

מעבד DSP: מעבד שיודע לחשב MAC ביעילות מקסימלית, כלומר בטיק 1 של שעון (אין מהיר מזה).

נסתכל על ה-pseudo code של חישוב MAC:

Loop over all times n:
    $y_n \leftarrow 0$
    Loop over num of coeff:
        $y_n \leftarrow y_n + a_i x_j$
    Output y_n

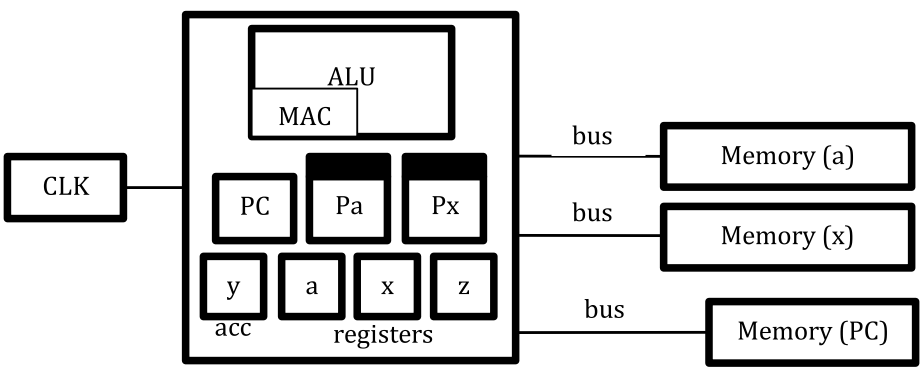
נסתכל על מבנה של CPU רגיל, ומספר הפעולות שיש לבצע עבור החישוב לעיל:



1. Update p_a
2. Update p_x
3. Load $a \leftarrow @p_a$
4. Load $x \leftarrow @p_x$
5. Fetch op (mult)
6. Decode op (mult)
7. Mult $a, x \rightarrow z$
8. Fetch op (add)
9. Decode op (add)
10. Acc $y \leftarrow y, z$

קיבלנו סה״כ 10 טיקים של שעון, אם מניחים שמכפלה לוקחת טיק אחד בלבד. מעבד DSP הוא בעל רכיבי חומרה נוספים:

1. הוספת פעולת MAC ב-ALU.
2. תוספות .reg. arith לרגיסטרים p_a, p_x – יכולת לבצע $\pm k$ על רגיסטרי המצביעים האלה, כך שעדכוני המצביעים יכולים להתבצע במקביל ולא ע״י ה-ALU.
3. הוספת זיכרון ו-bus נוסף כדי לאפשר שני load במקביל (תוספת זיכרון נדרשת בגלל contention). a, x ישבו לפיכך בשני זיכרונות שונים.
4. הוספת bus וזיכרון מיוחד ל-PC.



1. Update P_a || Update p_x
2. Load $a \leftarrow @p_a$ || Load $x \leftarrow @p_x$
3. Mac $y \leftarrow y + a \cdot x$

כעת צמצמנו את מספר הפעולות מ-10 ל-3, וצמצום לפעולה אחת יתבצע ע״י pipeline. כך ב- $n+2$ טיקים מבצעים n פעולות ועבור n גדול זה בערך טיק לפעולה:

update 1	update 2	update 3	update 4	update 5		
	load 1	load 2	load 3	load 4	load 5	
		MAC 1	MAC 2	MAC 3	MAC 4	MAC 5

המשבצות למטה משמאל יהיו עם NOP (no op).

מעבדי DSP עובדים באריתמטיקה של רוויה: בחיבור שני מספרים גדולים מאוד, מקבלים את המספר הגדול. יש שגיאה אך יותר קטנה מאשר במעבד רגיל שבו היינו מקבלים מספר שלילי. לעולם לא יהיה overflow.

<u>Zero Overhead Interrupt</u>:

פעולת interrupt במעבד רגיל לוקחת עשרות טיקים של שעון. במעבדי DSP יש לרגיסטרים shadow-registers: רגיסטרים צמודים שכאשר יש interrupt בטיק אחד תוכן כל הרגיסטרים מועתק ל-.s.r. הגבלה: במעבד רגיל באמצע interrupt יכול להיכנס עוד אחד, אך במעבדי DSP זה לא יכול לקרות, אחרת היינו זקוקים ל-.s.r מדרגה שניה וכך הלאה.

<u>Biological Signal Processing – BSP</u>:

דיבור:

כיצד מחוללים דיבור ושומעים דיבור. בגוף האדם יש שתי מערכות דיבור שונות:

1. מערכת מחוללת דיבור.
2. מערכת שמיעת דיבור.

בד״כ מערכת משדר היא הפונ' ההפוכה למקלט, אך כיוון שהמערכות הנ״ל לא נועדו במקור לחולל דיבור או לקלוט דיבור, הן לא ״מכוונות״ אחת לשניה.

<u>מערכת המחוללת דיבור</u>:

מיתרי הקול, שהם קפלי עור, מוציאים סיגנל שהוא אוסף פולסים בקצב בערך קבוע. הקצב תלוי בעוצמת ההחזקה של המיתרים – הלחץ עליהם, כאשר הזמן בין שני פולסים היוצאים ממיתרי הקול הוא ה-<u>pitch</u>. אוסף הפולסים מחזורי והמחזור הוא ה-pitch, ו-$f=\frac{1}{T}$ הוא תדר ה-pitch.

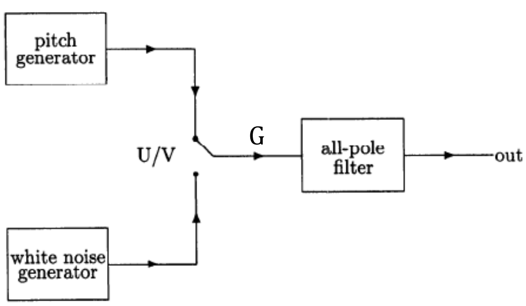
דיבור קולי – דיבור בו מרגישים את מיתרי הקול. רוב הדיבור הוא קולי (אלא אם לוחשים); בד״כ תנועות הן קוליות ועיצורים באים בזוגות של גרסה קולית וגרסה לא-קולית, למשל ״ש״ עם ״ז״ או ״פ״ (לא דגוש) עם ״ב״ (לא דגוש).

<u>פונמה</u>: היחידה הקצרה ביותר בשפה בעלת משמעות, כלומר החלפתה בעיצור אחר תשנה את משמעות השפה. לכל שפה אוסף פונמות, למשל בערבית אין פונמה של פ' (לא קולית).

<u>שפה טונאלית</u>: שפות בהן שינוי ה-pitch משנה את המשמעות. שפות מערביות אינן טונאליות בעוד שפות אסיתיות הן כן – סינית למשל.

ממיתרי הקול האוויר יוצא דרך הפה או דרך האף – למשל האותיות נ' ו-מ'. ישנן שפות, כמו צרפתית, בהן האוויר יוצא משניהם יחד.

מודל ה-Linear Predictive Coding – LPC: מודל פשטני של המערכת המחוללת דיבור:



למערכת יש מתג U/V הבורר בין voiced ל-unvoiced.

- קולי: יוצא ממחולל אוסף פולסים בעלי pitch נתון.
- לא קולי: יוצא ממחולל רעש לבן.

את התוצר מגבירים באמצעות Gain ומכניסים לחלל הפה, והפלט משם הוא סיגנל הדיבור כפונקציה של הזמן: $s(t)$.

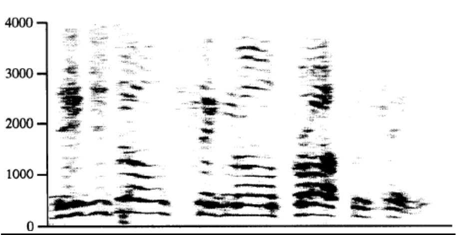
מערכת זו היא <u>מסנן AR (all pole)</u>, כלומר לא מוציאה תדרים שלא קיבלה בקלט. התדרים הללו נקראים <u>formants</u>, והם משתנים באמצעות הלשון, השיניים וכו'.

במודל זה לא ניתן לבטל תדרים לאפס אלא רק להגביר. בצרפתית נזדקק למודל מסנן ARMA בו ניתן לאפס תדרים.

<u>מודל ה-LPC בציר התדר</u>:

סדרת פולסים בציר התדר תראה כך: ככל שהפולסים בזמן יותר קרובים, כך בתדר הם יותר רחוקים. מקובל להניח מודל בו יש ירידה באמפליטודה לכל אוקטבה, כלומר בתדרים נמוכים יש יותר אנרגיה מאשר בגבוהים.

סיגנל מחזורי יראה כקווים בדידים בציר התדר, וכיוון שסיגנל הדיבור הוא מחזורי נקבל בציר התדר תדרים בדידים. לעומתו רעש לבן – ספקטרום רציף, לא קווים בדידים. <u>לפיכך: ע״י הסתכלות על הספקטרום ניתן לדעת האם הסיגנל קולי או לא</u>.



<u>סונוגרמה</u>:

- ציר ה-x הוא ציר הזמן, ציר ה-y הוא ציר התדר עד 4KHz.
- המקומות עם הקווים הברורים – דיבור קולי.
- תדר ה-pitch – התדר הנמוך ביותר.

הסונוגרמה משמאל מתאימה למשפט "digital signal processing", והחלקים החסרים הם לא בגלל הפסקה בין המילים אלא במקומות בהן יש דיבור לא קולי – "p","s".

כיוון שלא ניתן לחזור על אותו משפט פעמיים בדיוק באותו תזמון, זיהוי דיבור הינו בעיה קשה.

שמו של המודל נובע מכך שהוא פרדיקטיבי – כלומר מנסה לנבא את הדגימה הבאה על סמך הקודמות – מסנן AR. משמעות ה-coding היא שבאמצעות מודל זה מבצעים דחיסה/קידוד לדיבור כדי שיהיה ניתן להעברה דרך ערוץ דיגיטלי. למשל, ע״י הפעלת Yule-Walker ניתן למצוא את התדרים, ולשדר במקום 128KB רק 5KB – דחיסה.

שמיעה:

- צורתה הלא סימטרית של האוזן מאפשרת זיהוי כיוון קול.
- תעלת האוזן מגיעה עד עור התוף הרועד בחשיפה לקול, ורעידות אלו נוגעות בעצם הפטיש, המשמשת כמגבר.
- הפטיש נוגע בעצם השבלול, שבתוכה יש נוזל ומעיין לשון שמצידיה יש כמו שערות המחוברות לנוירונים. הנוירונים מעבירים פולסים חשמליים למוח – השבלול מבצע למעשה טרנספורם פורייה.

מנגנון וובר:

מנגנון המתבסס על העקרון של וובר, לפיו החושים שלנו אינם אבסולוטיים אלא יחסיים. ננצל מנגנון זה לשמיעה.
דוגמא לעקרון של וובר: ניתן להבדיל במשקל בין 0 מטבעות למטבע אחת, אך לא ניתן להבדיל במשקל בין 100 מטבעות ל-101 מטבעות. תחום זה הוא תחום הפסיכופיסיקה, וניסויים בתחום נעשו על חושים שונים, למשל על חוש הראייה (דגימות אדם מתי יש הגברה של כמות האור בזמן הזריחה) או חוש השמיעה (דגימת אדם מתי יש הגברה של עוצמת צליל).

נקודות הדגימה נקראות <u>JND</u>, ובהשוואה לעולם החיצוני מתברר כי הכפלה בעולם הפיסיקלי היא תוספת בעולם הפסיכולוגי – ה-JND הוא log של העולם הפיסיקלי. כלל זה נכון כמעט לכל החושים, ובטווח עוצמות סביר (בעוצמות גבוהות או תנאים מסויימים הכלל לא חל).

<u>קבוע פכנר</u>: קבוע הקיים לכל חוש / תופעה שהוא גורם המכפלה בעוצמה המביאה לתוספת יחידת JND אחת.

<u>שמיעה</u>:

חוק פכנר תקף גם לגבי התדר וגם לגבי העוצמה:

- תדר: העלאה באוקטובה היא הכפלת התדר ($+1\ octave = \times 2\ frequency$)
- עוצמה: גם כאן חוק פכנר תקף.

דחיסת דיבור:

- מסיבות היסטוריות הטלפון מעביר תדרים בין 0 ל-4 KHz, וליתר דיוק: $200Hz \le f \le 3.9KHz$.
- בטלפון ישנם שני מסננים: LP ו-HP. ה-LP מסנן כל מה שתחת 200Hz ומעביר אותו למעגל האחראי על הפעלת הטלפון (החשמל של הטלפון, שהרי הוא לא מחובר לקו חשמל נפרד). ה-HP מסנן את כל מה שמעל 200Hz – להעברת הקול.
- הידעת? מערכת הטלפוניה עובדת נכון 99.999% מהזמן, לעומת מערכת החשמל שעובדת נכון רק 99.9% מהזמן.
- בשימוש בטלפון מאבדים אינפורמציה, למשל לא ניתן להבחין בין פ׳ ו-ס׳.

<u>העברת סיגנל באופן דיגיטלי</u>:

לפי משפט הדגימה, קצב הדגימה צריך להיות פי 2 מהתדר הגבוה – כלומר 8KHz (8000 פעמים בשניה) – 14 ביטים לדגימה, ופחות מזה יש רעש. מדוע זה כך: בשחזור הסיגנל מתוך הדגימה ישנו רעש מהשלמת הפערים בין נקודות הדגימה. נניח כי משתמשים ב-16 ביטים, אז כדי לקבל שחזור סיגנל לדיבור שישמע טוב, צריך קצב של 128Kb/s.

<u>דחיסה ע״י חוק פכנר על עוצמת הדיבור</u>:

נשתמש בסקאלה אחרת של רמות שיותר צפופה בעוצמות החלשות – שם ישנה רגישות גבוהה לשינוי – ופחות צפופה העוצמות החזקות – שם הרגישות נמוכה לשינויים. כך, ככל שמתרחקים מה-0, ההבדל נעשה פחות רגיש, ומספיק להשתמש ב-8 ביט (256 רמות). כך מספיק להשתמש ב-64Kb/s, וזהו סטנדרט בטלפוניה.

<u>דחיסה נוספת ע״י חוק פכנר על התדר</u>:

PCM – pulse code modulation – נסתכל על הדגימות בתור פולסים ונקודד את גובה הפולס. אם נסתכל על סיגנל דיבור לאורך זמן ונבצע אינטגרציה על התדר, נקבל פריסה של תדרים כך ששכל שעולים בתדר העוצמה נהיית יותר חלשה, וזאת כיוון שהאוזן פחות רגישה בתדרים גבוהים. מכאן שהסיגנל הוא LP – הרבה תדרים נמוכים ומעט גבוהים.

ניתן לדגום את הדיבור באופן לוגריתמי כדי להנמיך את מספר הביטים. כיצד ניתן לעשות זאת:

- DPCM: ה-D מלשון delta: כיוון שרוב התדרים הם נמוכים, ההפרש ביניהם הוא יחסית קטן, ולכן מספיק לשמור את ההבדל של הדגימה הבאה ביחס לקודמתה, במקום ביחס לצירים. כך ניתן לרדת ל-32Kb/s.

- ADPCM – adaptive: ישנם אזורים בהם הסיגנל משתנה מעט, וצריך לקודד בעיקר בקצוות, לעומת איזורים בהם הוא משתנה הרבה, לכן יש צורך בשינוי בהתאם לשינוי בסיגנל. בשיטת ADPCM משנים בצורה אדפטיבית את גודל הטווח סביב הדגימה שלפיה מקודדים את הדגימה הבאה.

DM: שיטת הדלתא – קצב דגימה מהיר מאוד תוך שימוש בביט אחד לביטוי השינוי בדגימה. ישנו tradeoff – בכל הורדת התדר בפקטור 2 מרוויחים ביט אחד שניתן להוריד.

ADPCM בו משתמשים כיום משתמש בניבוי המבוסס על הכרת מערכת הדיבור וההנחה שזהו מנגנון AR, וכך ניתן להשתמש ב-yule-walker. מסכתלים על מספר מסויים של דגימות, מנבאים את הבאה, ומקודדים את ההפרש בין הניבוי לדגימה האמיתית. בקיצור – יורדים ל-32Kb/s.

ניתן לרדת גם ל-16Kb/s ול-8Kb/s, אבל זה לא מעניין.

קידוד מוסיקה:

- בקידוד מוסיקה הטווח גדול מאשר דיבור – פחות 20KHz.
- לרוב מקודדים שני ערוצי שמיעה – ימין ושמאל (לרוב יקודד הסכום וההפרש או יקודד ערוץ אחד וההפרש בינו לבין השני).
- מחלקים את טווח התדרים לאזורי שמיעה – פלחים קטנים לתדרים נמוכים וגדולים לתדרים גבוהים.

אפליקציית תקשורת נתונים:

כיום יש שתי שיטות לאינטרנט: DSL וכבלים, כאשר בשניהם יש אפנונים של סיגנלים. רוצים להשתמש בתקשורת ספרתית ולא אנלוגית, ולשם כך זקוקים לשלושת המשפטים של קלאוד שאנון:

1. משפט ההפרדה.
2. משפט קידוד המקור.
3. משפט קיבולת הערוץ.

משפט ההפרדה:

האינפורמציה האנלוגית מתקלקלת כאשר עוברת בערוץ אנלוגי, כיוון שהסיגנל מאבד מעוצמתו. הבעיות עם הגברת הסיגנל:

- כל ערוץ מוסיף רעש לסיגנל.
- כל ערוץ הוא כמו מסנן שלא מסוגל להעביר תדרים מעל תדר מסוים, ולכן תדרים גבוהים מגיעים פחות טוב ומתקבל סיגנל מעוות.

הגברת הסיגנל לא מבחינה ברעש, ולכן גם הרעש יוגבר. כיצד להתגבר על הבעיה, מלבד שידור התחלתי של הסיגנל בעוצמה הכי חזקה שניתן – **הפרדה** - מפרידים את מערכת התקשורת לחלקים:

- מקודד מקור: מקבל כקלט אינפורמציה ומוציא כפלט ביטים – סיגנל דיגיטלי.
- מקודד ערוץ: מקבל כקלט את פלט מקודד המקור, ומוציא סיגנל אנלוגי. הערוץ מעוות ומרעיש את הסיגנל. הסיגנל האנלוגי הוא כל סיגנל הניתן להעברה בין מקום למקום – קרני אור, מתח חשמלי וכו'.
- מפענח ערוץ: פונ' הפוכה למקודד הערוץ, מקבל את הסיגנל המעוות והמורעש ומוציא ביטים.
- מפענח מקור: מקבל ביטים ומוציא אינפורמציה.

המטרה היא כמובן שהאינפורמציה בכניסה תהיה שווה לזו ביציאה. עיקר משפט ההפרדה: מערכת זו היא אופטימלית, כלומר קיימת מערכת כזו ולא קיימת מערכת אחרת המעבירה יותר מידע בערוץ מסויים מאשר מערכת זו. מערכת DSI של מודל השכבות היא מערכת לא אופטימלית.

מקודד המקור: מקבל אינפורמציה ומוציא את המספר הקטן ביותר של ביטים שמתארים את האינפורמציה. ביט לפי מודל זה יקרא הביט של שאנון (המשפט לא מתאר כיצד להשיג מספר קטן ביותר של ביטים לייצוג האינפורמציה). דוגמאות: winzip הוא סוג של מקודד הדוחס אינפ' למספר קטן מאוד של ביטים, קרוב למס' המינימלי; מקודד דיבור הוא גם סוג של מקודד מקור.

מקודד ערוץ: בונה מהביטים סיגנל אנלוגי הלוקח בחשבון את הרעש בערוץ.

משפט קידוד המקור: מדבר על כמה יכולים להיות טובים מקודדי ומפענחי מקור.

משפט קיבולת הערוץ: מדבר על כמה יכולים להיות טובים מקודדי ומפענחי ערוץ.

כל שלושת המשפטים יחד מתארים מדוע מערכת דיגיטלית היא עדיפה. תיקון שגיאות בסיגנל דיגיטלי יותר נוח ואפשרי כיוון שלכל ביט שתי אפשרויות בלבד, כך שאם חלה טעות בביט מסויים פשוט הופכים את ערכו. הסיגנל אנלוגי קשה לאמוד את כמות הרעש.

מודם: modem = modulator and demodulator – מאפנן וגלאי.

מאפנן: לוקח ביטים ומשנה את הפרמטרים של הסיגנל.

גלאי: משחזר ביטים מתוך הסיגנל.

<u>מקודד ערוץ</u>: אינו מודולטור, הוא גדול יותר ממודולטור.

משפט קיבולת הערוץ:

לכל ערוץ פיסיקלי שגם מרעיש ומעוות יש קיבולת מקסימלית C – מספר ביטים לשניה שניתן להעביר בערוץ ולקבל בצד השני ללא הפרעות. העברת יותר מ-C ביטים תגרור שגיאות. נוסחה ל-C: $C = BW\log_2(SNR+1)$ כאשר SNR הוא יחס אות לרעש.

- כאשר רוחב הסרט גדול קיבולת הערוץ גדלה.
- כאשר יחס אות לרעש גדול, גם כן קיבולת הערוץ גדלה.

הוכחת המשפט:

<u>למה 1</u>: אם אין רעש (יחס אות לרעש הוא אינסופי), הקיבולת היא אינסופית.

<u>למה 2</u>: אם יש רעש אך רוחב הסרט אינסופי, הקיבולת היא אינסופית.

<u>הוכחת למה 1</u>:

נסתכל על ערוץ שלא מוסיף רעש, ונעביר בו סיגנל קבוע כאשר הסיגנל בכניסה הוא הסיגנל ביציאה כיוון שאין רעש. ניתן להעביר מספר גדול של ביטים בזמן קטן כרצוננו, כלומר אין הגבלה על מספר הביטים לשניה שניתן להעביר – הקיבולת אינסופית.

<u>הוכחת למה 2</u>:

נניח כי רוחב הסרט הוא אינסופי, והסיגנל שהתקבל ביציאה הוא בין $S-N/2$ ל-$S+N/2$. המרחק בין שני הסיגנלים גדול ממש מ-N. ישנו הסבר כלשהו שלא ברור לי, אבל בסופו של דבר ניתן להעביר מספר ביטים גדול כרצוננו בזמן קטן כרצוננו, ולכן הקיבולת היא אינסופית.

הוכחת המשפט לפי שתי הלמות:

נתונה מגבלה על רוחב הסרט – ערוץ low-pass, ומגבלת קיום רעש. נשדר סיגנל בין 0 ל-S. כיוון שהרעש הנמוך ביותר הוא $N/2$ – הסיגנל הנמוך ביותר שניתן לקבל הוא $0-N/2=-N/2$; כיוון שהרעש הגבוה ביותר הוא $N/2$ הסיגנל הגבוה ביותר שניתן לקבל הוא $S+N/2$. סה״כ ההפרש ביניהם הוא לכל היותר $S+N$.

נחלק תחום זה לנתחים שגודל כל אחד הוא N, ונקבל $\frac{S+N}{N}$ חלקים – מספר הרמות שיש לשדר: $\log_2\left(\frac{S+N}{N}\right)=\log_2(SNR+1)$. SNR הוא היחס בין האות לרעש: $\frac{S}{N}$. קיבלנו כי בכל רגע ניתן להעביר ע״י המאפנן $\log_2(SNR+1)$ ביטים.

מהירות הקפצת הסיגנל היא כרוחב הסרט, מהגדרה רוחב הסרט הוא מספר הפעמים שניתן לשנות את ערך הסיגנל בשניה. אז סה״כ קיבלנו:

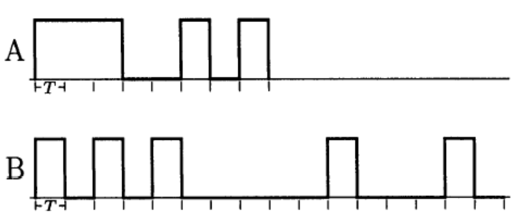
$$C = \underbrace{BW}_{\#symbols/sec} \cdot \underbrace{log_2(SNR+1)}_{\#bits/symbol}$$

כאשר סימבול הוא שידור של אחד מהמתחים. ב-low pass ניתן להעביר את כל המתחים מ-0 ועד BW.

בעבר רוחב הסרט היה $25dB$ וכיום הוא $35dB$. נכונות המשפט נובעת מכך שכל ערוץ פיסיקלי מגדיר רוחב סרט ומוסיף רעש. $dB=10\log_{10}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$ כאשר p_1 הוא הספק הסיגנל הראשון.

מודם NRZ: non return to zero – לא חוזר לאפס. נבחר שתי רמות מתח: $0_W, 1_W$. מודם זה לא טוב כיוון שהוא מעביר DC ולכן מעביר אנרגיה, אך עליו להעביר אינפורמציה. למשל, אם נרצה להעביר את הסיגנל 1111... או 0000..., האות יראה כ-DC – קבוע. הסבירות שהמקלט ידע להבחין כמה ספרות יש בקלט היא נמוכה.

<u>שיפורים</u>:



ניתן להפטר מהבעיה ע״י שימוש ב-RZ – return to zero. בשרטוט A הוא NRZ ו-B הוא RZ.

ב-RZ ניתן להבחין במספר ה-1-ים, אך לא ניתן להבחין אם יש 0-ים רצופים. קצב השינוי הוא פי 2 מאשר קודם, לכן רוחב הסרט צריך להיות פי 2, ובאותו רוחב סרט ניתן להעביר רק מחצית מקצב הביטים – פתרנו בעיה אחת אך נתקלנו באחרת.

<u>סיגנל automated mark inversion – AMI</u>:

הסיגנל יקפוץ מ-$\frac{1}{2}$ ל-$-\frac{1}{2}$, כאשר עבור 1 הסיגנל עובר בין שני ערכים אלו לסירוגין, ועבור 0 הסיגנל יושב על 0. כך גם פותרים את בעיית ה-DC וגם בעיית התזמון – שני 1-ים צמודים תופסים אותו מקום כמו ב-NRZ, ולא פי 2 כמו ב-RZ.

הבעיה בסיגנל זה היא שטווח הרעש המותר קטן, כיוון שמתוך 1 יש להבחין בין $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$ – שלושה ערכים לעומת 2 קודם. כלומר פגענו ב-SNR.

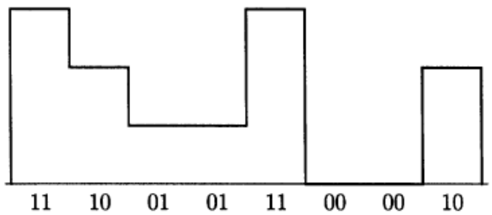
<u>סיגנל OOK – On Off Keying</u>:

הסיגנל שמשנים הוא לא DC אלא סיגנל sin. מכפילים את סיגנל ה-sin ב-NRZ של הביטים שלו, ומתקבל משהו מהצורה:

A


<u>סיגנל PAM – Pulse Amplitude Modulation</u>:

מעבירים כמו ב-NRZ סימבול, אך מסתכלים בכל רגע נתון על זוג ביטים – כלומר 4 אפשרויות לכל סימבול:



הסיכוי לטעות קטן – אם שידרנו 00 וקיבלנו 01, הטעות היא רק בביט אחד. אם השגיאה היא בין 01 ל-10, זו שגיאה של שני ביטים. ניתן לצמצם את השגיאה אם נקבע את סדר הרמות בהתאם לסדר קוד גריי: 00, 01, 11, 10 – כך ההבדל בין כל רמה מתפרש לשינוי בביט אחד.

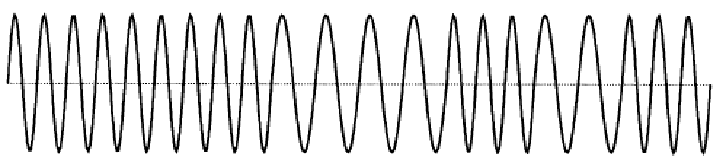
<u>בחזרה ל-OOK</u>:

נרצה להשוות אותו ל-NRZ. סיגנל ה-NRZ הוא סטוכסטי, ולפי משפט Wiener-Khintchine ניתן למצוא את הספקטרום של הסיגנל. ספקטרום הסיגנל הוא $\frac{\sin x}{x}$. סיגנל OOK הוא סיגנל NRZ כפול סיגנל $\sin \omega t$ שהוא הנושא (carrier). מכפלה זו היא בציר הזמן, וזו הרי קונבולוציה בציר התדר ולכן הספקטרום של OOK יראה כמו הספקטרום של NRZ מוזז על ציר התדר, סביב ω במקום סביב 0.

רוחב הסרט של OOK הוא פי 2 מ-NRZ, עבור אותה כמות אינפורמציה. נגדיר שני סיגנלים חדשים לשינוי הפאזה והתדר של הסינוס:

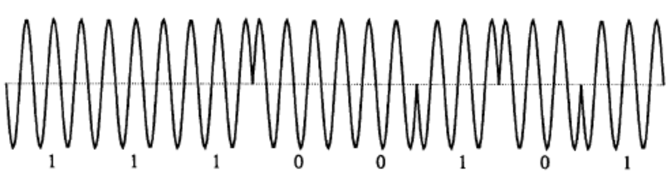
<u>סיגנל FSK</u>:

במקום לשנות את האמפליטודה כמו ב-OOK, נשנה את התדר כך שב-1 סינוס בתדר גבוה וב-0 סינוס בתדר נמוך:

B


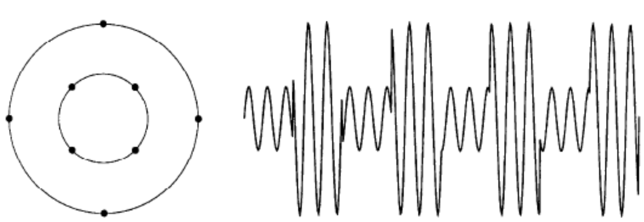
<u>סיגנל PSK</u>:

דומה ל-FSK רק שמשנים את הפאזה:

C


<u>QAM – Quadrature Amplitude Modulation</u>:

בכל רגע יש 2 פאזות ו-2 אמפליטודות שצריך למתג ביניהן. טרנספורם הילברט: צריך לקחת סיגנל $x(t) = A(t)\cos\phi(t)$ ולהפוך אותו ל-$y(t) = A\cdot x(t) = A(t)\cdot\sin\phi(t)$. קונסטלציה:



[תודה לעידן (http://www.multinet.co.il/forum/ALLmsg.asp?Fnumber=59) על סיכומי השיעור]