לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית 6#

אריאל סטולרמן

(1)

א. $A \leftrightarrow (B \wedge \neg A)$:

CNF: $A \leftrightarrow (B \wedge \neg A) \equiv \big(A \rightarrow (B \wedge \neg A)\big) \wedge \big((B \wedge \neg A) \rightarrow A\big) \equiv \big(\neg A \vee (B \wedge \neg A)\big) \wedge \big(\neg (B \wedge \neg A) \vee A\big) \equiv$

$\equiv \big((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg A)\big) \wedge (\neg B \vee \neg\neg A \vee A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg A) \wedge (\neg B \vee A) \equiv (\neg \boldsymbol{A}) \wedge (\neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{A})$

DNF: $(\neg A) \wedge (\neg B \vee A) \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \equiv (\neg \boldsymbol{A} \wedge \neg \boldsymbol{B})$

ב. $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \wedge C)$:

CNF: $(A \rightarrow B) \vee (\neg A \wedge C) \equiv (\neg A \vee B) \vee (\neg A \wedge C) \equiv (\neg A \vee B \vee \neg A) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \equiv (\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C})$

DNF: $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \equiv \big((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee B)\big) \vee \big((\neg A \vee B) \wedge C\big) \equiv (\neg \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}) \vee (\neg \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{C}) \vee (\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C})$

ג. $(A \rightarrow (B \rightarrow (\neg A \vee C)))$:

CNF: $A \rightarrow \big(B \rightarrow (\neg A \vee C)\big) \equiv \neg A \vee \big(B \rightarrow (\neg A \vee C)\big) \equiv \neg A \vee (\neg B \vee (\neg A \vee C)) \equiv \neg A \vee \neg B \vee \neg A \vee C \equiv \neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}$

DNF: $\neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}$

ד. $(((A \wedge B) \rightarrow C\big) \rightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C))$:

DNF: $\big((A \wedge B) \rightarrow C\big) \rightarrow (A \rightarrow C) \vee (B \rightarrow C) \equiv (\neg (A \wedge B) \vee C) \rightarrow (\neg A \vee C) \vee (\neg B \vee C) \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C) \rightarrow (\neg A \vee C \vee \neg B \vee C) \equiv$

$\equiv \neg (\neg A \vee \neg B \vee C) \vee (\neg A \vee \neg B \vee C) \equiv (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \wedge \neg \boldsymbol{C}) \vee \neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}$

CNF: $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee \neg A \vee \neg B \vee C \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C) \vee \big((A \wedge B) \wedge \neg C\big) \equiv \big(\neg A \vee \neg B \vee C \vee (A \wedge B)\big) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C \vee \neg C) \equiv$

$\equiv (\neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{A}) \wedge (\neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{B}) \wedge (\neg \boldsymbol{A} \vee \neg \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C} \vee \neg \boldsymbol{C})$

ניתן לצמצם את כל הפסוקיות בנוסחת ה-CNF כי כולן טאוטולוגיה.

(2)

קריטריון הכרחי ומספיק על הפסוקים האטומיים המופיעים בנוסחה בצורת CNF על מנת שזו תהיה טאוטולוגיה הוא שבכל פסוקית ($clause$) בנוסחה יופיע לפחות זוג אחד של פסוק אטומי ושלילתו. כך, לכל השמה שלא תהיה לנוסחה, בכל פסוקית יהיה לפחות ליטרל אחד המקבל ערך אמת t, ולכן כל הפסוקיות יסתפקו (ומכאן הנוסחה תסתפק תמיד). קריטריון זה הכרחי, שכן אם קיימת פסוקית שלא מכילה זוג של פסוק אטומי ושלילתו, אזי קיימת השמה שנותנת לכל ליטרל באותו הסגר את הערך f, ולכן הפסוקית לא תסתפק ומכאן הנוסחה לא תסתפק גם כן.

(3)

נוכיח שהקבוצה $\{\uparrow\}$ שלמה פונקציונאלית ע"י כך שנראה כי ניתן לבטא באמצעותה את הקבוצה $\{\neg, \wedge\}$, שידוע שהיא שלמה פונקציונאלית

א. הקשר $\neg$: נגדיר $\neg A \coloneqq A \uparrow A$. להלן טבלת האמת להוכחת נכונות:

A	$\neg A$	$A \uparrow A$
t	f	$t \uparrow t = f$
f	t	$f \uparrow f = t$

ב. הקשר $\wedge$: נגדיר $A \wedge B \coloneqq (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B)$. מהוכחת סעיף א' נובע כי מספיק להוכיח ש-$A \wedge B \equiv \neg(A \uparrow B)$. להלן טבלת אמת להוכחה:

A	B	$A \wedge B$	$A \uparrow B$	$\neg(A \uparrow B)$
t	t	$\boldsymbol{t}$	f	$\boldsymbol{t}$
t	f	$\boldsymbol{f}$	t	$\boldsymbol{f}$
f	t	$\boldsymbol{f}$	t	$\boldsymbol{f}$
f	f	$\boldsymbol{f}$	t	$\boldsymbol{f}$

(4)

להלן הוכחה כי המערכת $\{\neg, \leftrightarrow\}$ אינה שלמה פונקציונאלית:

טענה: לא ניתן לממש באמצעות מערכת זו פונקציה דו מקומית שסה"כ מספר הפעמים שמחזירה t הוא אי-זוגי, למשל פונקציית $\vee$:

p	q	$p \vee q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

תהי A נוסחה מעל הקשרים $\{\neg, \leftrightarrow\}$. להלן הוכחה באינדוקציה מבנית על מבנה הנוסחה A:

- אם A מורכבת רק מפסוק אטומי, אז ברור כי מספר הפעמים שיוחזר t הוא זוגי (השווה למספר הפעמים שמוחזר f). לפיכך לא ניתן באמצעות נוסחה המורכבת רק מפסוק אטומי ליצור פונקציה המחזירה t מספר אי זוגי של פעמים.
- נניח נכונות הטענה על הנוסחות B ו-C אשר מעל הקשרים $\{\neg, \leftrightarrow\}$ ונוכיח על $A = B \leftrightarrow C$, $\neg C$ ו-$\neg B$:

B	C	$B \leftrightarrow C$	$\neg B$	$\neg C$
t	t	t	f	f
t	f	f	f	t
f	t	f	t	f
f	f	t	t	t

ניתן לראות כי בכל אחד מהמקרים מספר ה-t המתקבל ע"י כל ההצבות האפשריות ב-A הוא זוגי.

מכאן שלא ניתן ליצור באמצעות מערכת זו את הפונקציה $\vee$, ולכן המערכת אינה שלמה פונקציונאלית.