לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית #8

אריאל סטולרמן

נסמן את יחס אי-הסיפוק $\nvDash$ בסימון $\vDash$!

(1)

א. $\varphi = \forall x(A \to B) \to (\exists xA \to \exists xB)$: **תקפה לוגית**

נניח בשלילה שהנוסחה אינה תקפה לוגית, אז קיים מבנה M והשמה v כך ש- $M, v\,! \vDash \varphi$, ולכן $M, v \vDash \forall x(A \to B)$ וגם $M, v! \vDash \exists xA \to \exists xB$, ומהאחרון מתקיים $M, v \vDash \exists xA$ וגם $M, v! \vDash \exists xB$ ולכן $M, v \vDash \forall x\neg B$. לכן לכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M, v' \vDash A \to B$ וגם מתקיים $M, v' \vDash \neg B$ וכמו כן קיימת v'' שהיא x-וריאנט של v המקיימת $M, v'' \vDash A$. אבל, אם קיימת x-וריאנט של v המספקת עם M את A, ולכל x-וריאנט של v ו-M גם $A \to B$ מסתפקת, אז קיימת x-וריאנט v' של v כך ש-$M, v' \vDash B$, בסתירה. לכן הנוסחה תקפה לוגית.

ב. $\varphi = \forall x(A \to B) \to (\forall xA \to \forall xB)$: **תקפה לוגית**

נניח בשלילה שהנוסחה אינה תקפה לוגית, אז קיים מבנה M והשמה v כך ש-$M, v! \vDash \varphi$, ולכן $M, v \vDash \forall x(A \to B)$ וגם $M, v! \vDash \forall xA \to \forall xB$. מהאחרון מתקיים $M, v \vDash \forall xA$ וגם $M, v \vDash \exists x\neg B$. מכל הנ"ל נובע שלכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M, v' \vDash A \to B$ וגם $M, v' \vDash A$. כיוון ש-$M, v' \vDash A \to B$ אז $M, v' \vDash \neg A$ או $M, v' \vDash B$, וכיוון ש-$M, v' \vDash A$ אז בהכרח $M, v' \vDash B$. מ-$M, v \vDash \exists x\neg B$ נובע שקיימת v'' שהיא x-וריאנט של v כך ש-$M, v'' \vDash \neg B$, אך זו סתירה שלכל v' שהיא x-וריאנט של v $M, v' \vDash B$. לכן הנוסחה תקפה לוגית.

ג. $\varphi = (\exists xA \wedge \exists xB) \to \exists x(A \wedge B)$: **אינה תקפה לוגית**

להלן דוגמא נגדית: $M = <\mathbb{N}, I>$, $x \in I[A]$ אמ"מ x זוגי, ו-$x \in I[B]$ אמ"מ x אי-זוגי. ברור כי קיים x זוגי וקיים גם x לא זוגי, אך לא קיים x שהוא שניהם. לכן הנוסחה אינה תקפה לוגית.

ד. $x \notin Fv[A], \varphi = \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$: **תקפה לוגית**

נניח בשלילה כי קיימים M, v כך ש-$M, v! \vDash \varphi$, אז $M, v \vDash \forall x(A \to B)$ וגם $M, v! \vDash A \to \forall xB$, ולכן $M, v \vDash A$ וגם $M, v \vDash \exists x\neg B$. לפיכך לכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M, v' \vDash A \to B$, ולכן $M, v' \vDash \neg A$ או $M, v' \vDash B$. כמו כן קיימת v'' שהיא x-וריאנט של v המקיימת $M, v'' \vDash \neg B$, ולכן $M, v'' \vDash \neg A$. נזכור כי עבור v מתקיים $M, v \vDash A$, ולכן x בהכרח משתנה חופשי ב-A, אחרת מ-M, v ומ-M, v'' (כאשר v'' נבדלת מ-v רק בערך הניתן ל-x) היתה מסתפקת או A או $\neg A$, וזו סתירה לכך ש-$x \notin Fv[A]$. לכן הנוסחה תחת התנאי הנתון תקפה לוגית.

ה. $x \notin Fv[A], \varphi = \forall x(A \vee B) \to (A \vee \forall xB)$: **תקפה לוגית**

נניח בשלילה כי קיימים M, v כך ש-$M, v! \vDash \varphi$, אז $M, v \vDash \forall x(A \vee B)$ וגם $M, v! \vDash A \vee \forall xB$, ולכן $M, v \vDash \neg A$ וגם $M, v \vDash \exists x\neg B$. לפיכך לכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M, v' \vDash A \vee B$ ולכן $M, v' \vDash A$ או $M, v' \vDash B$, וכמו כן קיימת v'' שהיא x-וריאנט של v המקיימת $M, v'' \vDash \neg B$, ולכן מקיימת $M, v'' \vDash A$. נזכור כי עבור v מתקיים $M, v \vDash \neg A$, ומאותו שיקול בסעיף הקודם נקבל כי x בהכרח משתנה חופשי ב-A, וזו סתירה לכך ש-$x \notin Fv[A]$. לכן הנוסחה תחת התנאי הנתון תקפה לוגית.

ו. $\varphi = (\forall x\exists yA) \to (\exists y\forall xA)$: **אינה תקפה לוגית**

להלן דוגמא נגדית: $M = <\mathbb{R}, I>$, $<x, y> \in I[A]$ אמ"מ $x < y$. ברור שלכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש-$x < y$, פשוט לוקחים $y := x + 1$, אבל לא קיים $y \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x < y$. לכן הנוסחה אינה תקפה לוגית.

ז. $\varphi = (\forall xA) \to (\exists xA)$: **תקפה לוגית**

נניח בשלילה כי קיימים M, v כך ש-$M, v! \vDash \varphi$ אז $M, v \vDash \forall xA$ וגם $M, v \vDash \forall x\neg A$. לפיכך לכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M, v' \vDash A$ וגם $M, v' \vDash \neg A$, וזו סתירה. לכן הנוסחה תקפה לוגית.

ח. $\varphi = (\exists xA) \to (\forall xA)$: **אינה תקפה לוגית**

להלן דוגמא נגדית: $M = <\mathbb{R}, I>$, $x \in I[A]$ אמ"מ $x > 100$. ברור כי קיים x הגדול מ-100, אך לא כל x גדול מ-100. לכן הנוסחה אינה תקפה לוגית.

ט. $\varphi = \big(\exists x(A \vee B)\big) \to (\exists xA \vee \exists xB)$: **תקפה לוגית**

נניח בשלילה כי קיימים M, v כך ש-$M, v! \vDash \varphi$, אז $M, v \vDash \exists x(A \vee B)$ וגם $M, v \vDash (\forall x\neg A) \wedge (\forall x\neg B)$. לכן קיימת v' שהיא x-וריאנט של v המקיימת $M, v' \vDash A \vee B$ ולכן $M, v' \vDash A$ או $M, v' \vDash B$. כמו כן $M, v \vDash \forall x\neg A$ וגם $M, v \vDash \forall x\neg B$ ולכן לכל v'' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M, v'' \vDash \neg A$ וגם $M, v'' \vDash \neg B$, וזו בסתירה לתנאי v'. לפיכך הנוסחה תקפה לוגית.

י. $\varphi = (\neg\exists xA) \to (\forall x\neg A)$: **תקפה לוגית**

יהיו M מבנה ו-v השמה כלשהם. אם $M,v \not\models \neg\exists xA$, סיימנו. אחרת, אם $M,v \models \neg\exists xA$ אז לא קיימת v' שהיא x-וריאנט של v המקיימת $M,v' \models A$. כלומר, לכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M,v' \models \neg A$ ולכן $M,v \models \forall x\neg A$ כנדרש. לכן הנוסחה תקפה לוגית.

יא. $\varphi = (\forall x\neg A) \to (\neg\exists xA)$: **תקפה לוגית**

יהיו M מבנה ו-v השמה כלשהם. אם $M,v \not\models \forall x\neg A$, סיימנו. אחרת, אם $M,v \models \forall x\neg A$ אז לכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M,v' \models \neg A$, ולכן לא קיימת v' שהיא x-וריאנט של v המקיימת $M,v' \models A$, כלומר $M,v \models \neg\exists xA$ כנדרש. לכן הנוסחה תקפה לוגית.

(2)

א. $\varphi = \forall x(p(x) \to p(c))$: **אינה תקפה לוגית**

להלן דוגמא נגדית: $M =< \mathbb{N}, I >$, $I[p]$ יהיה יחס הזוגיות (כלומר $k \in I[p]$ אמ"מ k זוגי), ו-$c = 5$. קיימת השמה v הנותנת ל-x את הערך 2 למשל, שעבורה הנוסחה $p(x) \to p(c)$ אינה מסתפקת ע"י M, v, ולכן φ אינה תקפה לוגית.

ב. $\varphi = \exists y\left(\forall x\big(q(x,y)\big)\right) \to \forall x\left(\exists y\big(q(x,y)\big)\right)$: **תקפה לוגית**

יהיו M, v מבנה והשמה כל שהם. אם $M,v \not\models \exists y\left(\forall x\big(q(x,y)\big)\right)$ אז $M,v \models \varphi$, מהגדרה. אם $M,v \models \exists y\left(\forall x\big(q(x,y)\big)\right)$ אז קיימת v' שהיא y-וריאנט של v כך שלכל v'' שהיא x-וריאנט של v' מתקיים: $M,v'' \models q(x,y)$. מכאן שלכל w' שהיא x-וריאנט של v קיימת w'' שהיא y-וריאנט של w' המקיימת $M,w'' \models q(x,y)$ – פשוט נגדיר את $w''(y) = v'(y)$. לכן במקרה זה $M,v \models \forall x\left(\exists y\big(q(x,y)\big)\right)$ ולכן הנוסחה תקפה לוגית.

ג. $\varphi = \forall x\left(\exists y\big(q(x,y)\big)\right) \to \exists y\left(\forall x\big(q(x,y)\big)\right)$: **אינה תקפה לוגית**

להלן דוגמא נגדית: $M =< \mathbb{R}, I >$, $< x,y > \in I[q]$ אמ"מ $x < y$. אכן מתקיים שלכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $y \in \mathbb{R}$ כך ש-$x < y$, למשל $y \coloneqq x + 1$. עם זאת, לא קיים $y \in \mathbb{R}$ כך <u>שלכל</u> $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $x < y$. לכן φ אינה תקפה לוגית.

(3)

א. $\forall y\big(e(f_2(x,y),z)\big)$:

- השמה מספקת: $v(x) = v(z) = 0$.
- השמה לא מספקת: $v(x) = v(z) = 1$.

ב. $e\big(c_0, f_1(x,y)\big)$:

- השמה מספקת: $v(x) = v(y) = 0$.
- השמה לא מספקת: $v(x) = v(y) = 1$.

ג. $l\big(c_0, f_1(x,y)\big)$:

- השמה מספקת: $v(x) = v(y) = 1$.
- השמה לא מספקת: $v(x) = v(y) = 0$.

ד. $\exists y\left(\exists z\left(\neg e(c_0,z) \land e(f_2(z,z),z) \land e\big(x, f_2(y,z)\big)\right)\right)$:

הנוסחה הנ"ל תקפה במבנה המספרים הטבעיים, שכן משמעותה שקיימים y, z כך ש-$z \neq 0$, $z^2 = z$ ו-$x = y \cdot z$. x הוא המשתנה החופשי היחיד בנוסחה ולכן לכל השמה v כך ש-$v(x) = c$ ניתן לקחת את $z = 1, y = c$ והנוסחה תסתפק.

(4)

נוכיח כי אם קיים מבנה M וקיימת השמה v כך ש-$M,v \not\models \big(\forall x(B \to A)\big) \to (\exists xB \to A)$ אז x הוא משתנה חופשי ב-A. לפי ההנחה מתקיים $M,v \models \forall x(B \to A)$ וגם $M,v \not\models \exists xB \to A$, כלומר $M,v \models \exists xB$ וגם $M,v \models \neg A$. מכאן שלכל v' שהיא x-וריאנט של v מתקיים $M,v' \models B \to A$, ולכן $M,v' \models \neg B$ או $M,v' \models A$. כמו כן קיימת v'' שהיא x-וריאנט של v המקיימת $M,v'' \models B$. לכן בהכרח מתקיים $M,v'' \models A$. אם כן עבור ההשמה v מתקיים $M,v \models \neg A$ ועבור ההשמה v'' השונה בערכה מ-v רק בהשמה ל-x מתקיים $M,v'' \models A$. לפיכך לא יתכן ש-x משתנה קשור ב-A, אחרת מ-M, v ומ-M, v'' היתה מסתפקת או A או $\neg A$, כיוון ששתי ההשמות נבדלות אחת מהשניה בערך הניתן ל-x בלבד. לכן x משתנה חופשי ב-A.

(5)

א. $\forall x_1 \forall x_3 \big(p(x_1, x_2) \to q(x_3)\big)$: x_1, x_3 קשורים, x_2 חופשי.

ב. $\forall x_2 \Big(p\big(f(x_2)\big) \to \forall x_3 q(x_1, x_2 x_3)\Big)$: x_2, x_3 קשורים, x_1 חופשי.

ג. $\big(\neg\neg p(x_2) \land \forall x_5 p(x_2)\big) \land \forall x_2 p(x_2)$: שני המופעים הראשונים של x_2 חופשיים, האחרון קשור. x_5 קשור (מופיע במופע קשירה).

ד. $\big[\forall x_1 \big(r(x_1, x_3) \land \exists x_1 r(x_2, x_3)\big)\big] \lor \big[\exists x_1 \forall x_1 \big(r(x_2, x_5) \to \exists x_4 r(x_1, x_4)\big)\big]$:

בחלק הראשון של ה-$\lor$: x_1 קשור, x_2, x_3 חופשיים.

בחלק השני של ה-$\lor$: x_2, x_5 חופשיים, x_1, x_4 קשורים.