לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית #9

אריאל סטולרמן

נסמן את יחס אי הסיפוק $\nvDash$ או אי הנביעה $\nvdash$ בסימונים ! $\vDash$! ו-$\vdash$! בהתאמה.

(1)

נניח t חופשי להצבה במקום x ב-A, ויהיו M מבנה ו-v השמה כלשהם. אם מתקיים $M,v! \vDash A\{t/x\}$ אז ברור שמתקיים $M,v \vDash A\{t/x\} \to \exists xA$.
אם מתקיים $M,v \vDash A\{t/x\}$, נראה כי מתקיים $A\{t/x\} \vdash^t_{FOL} \exists xA$, ולכן כל t-מודל של $A\{t/x\}$ הוא t-מודל של $\exists xA$, ולפיכך $M,v \vDash \exists xA$.
מטענה שהוכחה בתרגול שלפיה $T \cup \{A\} \vdash^t_{FOL} B$ אמ"מ $T \vdash^t_{FOL} A \to B$ נובע ש- $\vdash^t_{FOL} A\{t/x\} \to \exists xA$, כלומר לכל M,v מתקיים $M,v \vDash A\{t/x\} \to \exists xA$. אם כן, נניח כי קיים מבנה M והשמה v כך ש-$M,v \vDash A\{t/x\}$. כיוון שכל מופע חופשי של x מוחלף ב-t, הרי שההשמה v אינה משפיעה על מופעי ם חופשיים של x בנוסחה A (במקומם הוצב t), ולפיכך ניתן לאמר שקיימת v' שהיא x-וריאנט של v המוגדרת: $\forall y. v'(y) = \begin{cases} v[t], & y = x \\ v[y], & y \neq x \end{cases}$, ומהגדרתה מתקיים $M,v' \vDash A$ (ברור כי $M,v' \vDash A$ אמ"מ $M,v \vDash A\{t/x\}$). לפיכך מתקיים $M,v \vDash \exists xA$. לכן כל t-מודל של $A\{t/x\}$ הוא גם t-מודל של $\exists xA$, כנדרש.

(2)

יהיו s_1, s_2 שמות עצם כלשהם, A נוסחה ו-x משתנה. נראה כי לכל השמה v המקיימת $v[s_1] = v[s_2]$ מתקיים $v[A\{s_1/x\}] = v[A\{s_2/x\}]$:
יהיו B,C נוסחאות אטומיות. להלן הוכחה באינדוקציה על מבנה הנוסחה A:

- אם x לא מופיע ב-A אז $v[A\{s_1/x\}] = v[A] = v[A\{s_2/x\}]$.
- אם A נוסחה אטומית n-מקומית $A = P(t_1, \dots, t_n)$ אז:

$$v[A\{s_1/x\}] = v[P(t_1, \dots, t_n)\{s_1/x\}] = v[P(t_1\{s_1/x\}, \dots, t_n\{s_1/x\})] = I[P]\big[v[t_1\{s_1/x\}], \dots, v[t_n\{s_1/x\}]\big] \underset{\text{לפי משפט ההחלפה עבור ש"ע}}{=}$$

$$I[P]\big[v[t_1\{s_2/x\}], \dots, v[t_n\{s_2/x\}]\big] = v[P(t_1\{s_2/x\}, \dots, t_n\{s_2/x\})] = v[P(t_1, \dots, t_n)\{s_2/x\}] = v[A\{s_2/x\}]$$

- אם $A = \neg B$ אז $v[A\{s_1/x\}] = v[\neg B\{s_1/x\}] = \neg^*(v[B\{s_1/x\}]) \underset{\text{לה"א}}{=} \neg^*(v[B\{s_2/x\}]) = v[\neg B\{s_2/x\}] = v[A\{s_2/x\}]$.
- אם $A = B \circ C$ (כאשר $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$) אז:

$$v[A\{s_1/x\}] = v[(B \circ C)\{s_1/x\}] = v[B\{s_1/x\} \circ C\{s_1/x\}] = \circ^*\left(v[B\{s_1/x\}, C\{s_1/x\}]\right) \underset{\text{לה"א}}{=} \circ^*\left(v[B\{s_2/x\}, C\{s_2/x\}]\right) =$$

$$= v[B\{s_2/x\} \circ C\{s_2/x\}] = v[(B \circ C)\{s_2/x\}] = v[A\{s_2/x\}]$$

- אם $A = \forall yB \ or \ \exists yB$ אז (נראה עבור $\forall$, הוכחה דומה עבור $\exists$):
  $x = y$: $v[A\{s_1/x\}] = v[(\forall yB)\{s_1/x\}] = v[\forall yB] = v[(\forall yB)\{s_2/x\}] = v[A\{s_2/x\}]$.
  $x \neq y$: $v[A\{s_1/x\}] = v[(\forall yB)\{s_1/x\}] = v[\forall y(B\{s_1/x\})] \underset{\forall v' \in y-Variant\ (v)}{=} v'[B\{s_1/x\}] \underset{\text{לה"א}}{=} v'[B\{s_2/x\}] = \dots = v[A\{s_2/x\}]$.

(3)

א. A $\vdash^t_{FOL}$ $T!$ אמ"מ $T \cup \{\neg A\}$ אינה t-ספיקה: **הטענה אינה נכונה**
להלן דוגמא נגדית: $A \coloneqq (x = 3)$, $T = \{\neg A\}$ ($\neg A = \neg(x = 3)$), $M =< N, I >$, $v[x] = 4$. בדוגמא זו מתקיים $M,v \vDash \varphi$ לכל $\varphi \in T$, אך $M,v! \vDash A$, ולכן A $\vdash^t_{FOL}$ $T!$. כמובן ש-$< M,v >$ מהוות t-מודל ל-$T = T \cup \{\neg A\}$ ולכן $T \cup \{\neg A\}$ היא t-ספיקה.

ב. A $\vdash^v_{FOL}$ $T!$ אמ"מ $T \cup \{\neg A\}$ אינה v-ספיקה: **הטענה אינה נכונה**
להלן דוגמא נגדית: $A \coloneqq (x = 3)$, $T = \{\neg A\}$, $M =< \{4\}, I >$. בדוגמא זו מתקיים כי לכל השמה (השמה יחידה) v במבנה M $M,v \vDash \varphi$ לכל $\varphi \in T$, ולכן M מהווה v-מודל ל-T, אך $M,v! \vDash A$, ולכן M אינה מהווה v-מודל ל-A. מכאן ש-A $\vdash^v_{FOL}$ $T!$. עם זאת המבנה M מהווה v-מודל ל-$T = T \cup \{\neg A\}$ ולכן $T \cup \{\neg A\}$ היא v-ספיקה.

(4)

יהיו A, B נוסחאות כך ש-$Fv[A], Fv[B] \subseteq \{x, y\}$.

א. $A \wedge B \ \nvdash^{t}_{FOL} T$ אמ"מ $T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$ היא t-ספיקה : **הטענה נכונה**

$\Leftarrow$: נניח כי $A \wedge B \ \nvdash^{t}_{FOL} T$, אז קיימים מבנה M והשמה v כך ש- $M, v \vDash T$ וגם $M, v \nvDash A \wedge B$. מהאחרון נובע ש- $M, v \vDash \neg(A \wedge B)$ ולכן $M, v \vDash \neg A \vee \neg B$. ומכאן מצאנו מבנה M והשמה v המקיימים $M, v \vDash T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$, ולכן $T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$ היא t-ספיקה.

$\Rightarrow$: נניח כי $T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$-$t$ ספיקה, ומכאן קיימים מבנה M והשמה v כך ש-$M, v \vDash T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$. מכאן שכל נוסחה בקבוצה זו מסתפקת ולכן $M, v \vDash \neg A \vee \neg B$. לפיכך מתקיים כי $M, v \vDash \neg A$ או $M, v \vDash \neg B$, ולכן $M, v \nvDash A$ או $M, v \nvDash B$ ולכן בהכרח $M, v \nvDash A \wedge B$. לפיכך מצאנו מבנה והשמה שמספקים את T ולא מספקים את $A \wedge B$ ולכן $A \wedge B \ \nvdash^{t}_{FOL} T$.

ב. $A \wedge B \ \nvdash^{v}_{FOL} T$ אמ"מ $T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$ היא v-ספיקה : **הטענה אינה נכונה**

להלן דוגמא נגדית : $A := (x = x), B := (x = y), T = \emptyset$. מתקיים $A \wedge B \ \nvdash^{t}_{FOL} T$, כיוון שלמשל עבור המבנה $M =< \{1,2\}, I >$ אכן מתקיים $M \vDash T$ אך קיימת השמה v כך ש- $v[x] = 1, v[y] = 2$ עבורה $M, v \nvDash A \wedge B$ ולכן $M \nvDash A \wedge B$. כמו כן מתקיים כי $T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$ אינה v-ספיקה כיוון שאף מבנה (לא ריק) אינו מהווה v-מודל ל- $\neg A \vee \neg B$: נניח $a \in \pi_1(M)$, אז ההשמה $v[x] = v[y] = a$ מקיימת $M, v \nvDash (x \neq x) \vee (x \neq y)$, ולכן $M \nvDash \neg A \vee \neg B$ לכל מבנה M, ולכן $T \cup \{\neg A \vee \neg B\}$ אינה v-ספיקה.

ג. לכל נוסחה A, קבוע c ומשתנים x, z מתקיים $A\{c/x\} = (A\{z/x\})\{c/z\}$: **הטענה אינה נכונה**

להלן דוגמא נגדית : $A = z \wedge \forall x(x \vee \neg x)$. מתקיים : $A\{c/x\} = z \wedge \forall x(x \vee \neg x)$ (אין החלפה שכן x אינו חופשי), ולעומת זאת מתקיים : $(A\{z/x\})\{c/z\} = (z \wedge \forall x(x \vee \neg x))\{c/z\} = c \wedge \forall x(x \vee \neg x)$. עבור מבנה $M =< \{t, f\}, I >$, השמה v המקיימת $v[z] = f$ וקבוע $c = t$ מתקיים כי $M, v \vDash A\{c/x\}$ ו-$M, v \nvDash (A\{z/x\})\{c/z\}$, ולכן לא יתכן שהטענה נכונה.