לוגיקה למדמ"ח / תרגיל בית 11#

אריאל סטולרמן

(1)

נתונה L שפה מסדר ראשון, T תורה של פסוקים ב-L ו-A נוסחה כך ש-$Fv[A] = \{x, y\}$. תהי L' הרחבה של L ע"י הוספת סימן היחס $P_A: \iota^2 \to o$, ותהי $T' = T \cup \{\forall x \forall y (P_A(x,y) \leftrightarrow A)\}$. להלן הוכחה שלכל נוסחה B בשפה L מתקיים $T \vdash_{FOL} B \Leftrightarrow T' \vdash_{FOL} B$:

נניח תחילה כי $T \vdash_{FOL} B$. כיוון ש-$T \subseteq T'$ מתקיים ממונוטוניות ש-$T' \vdash_{FOL} B$. נניח כעת כי $T \nvdash_{FOL} B$, אז קיים מבנה $M =< D, I >$ כך ש-$M \vDash T$ וגם $M \nvDash B$. נגדיר מבנה $M' =< D, I' >$ כאשר I' מוגדר כמו I רק בתוספת:

$$I'[P_A] = \{< d_1, d_2 > \in D^2 \mid exists\ v\ s.t. M, v[x \coloneqq d_1, y \coloneqq d_2] \vDash A\}$$

ברור כי תחת σ_L מתקיים $M' \nvDash B$, $M' \vDash T'$. נותר להראות כי $M' \vDash \forall x \forall y (P_A(x,y) \leftrightarrow A)$, כלומר שלכל השמה v: $M', v \vDash \forall x \forall y (P_A(x,y) \leftrightarrow A)$. להראות זאת שקול להראות $M', v \vDash (P_A(x,y) \leftrightarrow A)\{d_1/x, d_2/y\}$ לכל $d_1, d_2 \in D$, וזה שקול להראות כי $M', v[x \coloneqq d_1, y \coloneqq d_2] \vDash P_A(x,y) \leftrightarrow A$ לכל $< d_1, d_2 > \in D^2$. נגדיר $v' \coloneqq v[x \coloneqq d_1, y \coloneqq d_2]$. נוכיח את הנ"ל ע"י כך שנוכיח כי $M', v' \vDash P_A(x,y)$ אמ"מ $M', v' \vDash A$:

- אם $M', v' \vDash P_A(x,y)$ אז $< d_1, d_2 > \in I'[P_A]$. מהגדרת $I'[P_A]$ לעיל מתקיים $M', v' \vDash A$.
- אם $M', v' \vDash A$, אז מהגדר $I'[P_A]$ מתקיים $< d_1, d_2 > \in I'[P_A]$. לפיכך $M', v' \vDash P_A(x,y)$.

לפיכך הראינו ש-$M' \vDash T'$ וגם $M' \nvDash B$, ולכן $T' \nvdash_{FOL} B$.

(2)

הגדרת הסיגנטורה:

- קבוע: V
- סימן פונקציה חד מקומי ת: $||: \iota \to \iota$ (ישמש כערך מוחלט למספרים וכעוצמת קבוצה לקבוצות, ולכל עוצמה P שאינה מספר נגדיר $|P| = P$).
- סימן יחס חד מקומי: $group: \iota \to o$
- סימן יחס דו מקומי: $=: \iota^2 \to o$
- סימן יחס דו מקומי: $\subset: \iota^2 \to o$
- סימן יחס דו מקומי: $<: \iota^2 \to o$

א. לכל קבוצה X קיימת קבוצה Y כך שעוצמת קבוצה Y גדולה מעוצמת קבוצה X:

$$\forall X \big(group(X) \to \exists Y (group(Y) \land \neg(|Y| = |X|) \land \neg(|Y| < |X|))\big)$$

ב. לכל X ו-Y, אם X מוכל ב-Y, אז עוצמת X אינה גדולה מעוצמת Y:

$$\forall X \forall Y \Big(group(X) \land group(Y) \to \big((X \subset Y) \to \neg(|Y| < |X|)\big)\Big)$$

ג. כל הקבוצות מוכלות ב-V:

$$\forall X \big(group(X) \to (X \subset V)\big)$$

ד. V אינה קבוצה:

$$\neg group(V)$$

להלן הוכחה בדדוקציה טבעית שטענה ד' נובעת מהטענות א'-ג':

#		Rule	Assumptions
1	$\forall X\big(group(X) \to \exists Y(group(Y) \wedge \neg(\lvert Y\rvert = \lvert X\rvert) \wedge \neg(\lvert Y\rvert < \lvert X\rvert))\big)$	*Assumption*	*1*
2	$\forall X \forall Y \Big(group(X) \wedge group(Y) \to \big((X \subset Y) \to \neg(\lvert Y\rvert < \lvert X\rvert)\big)\Big)$	*Assumption*	*2*
3	$\forall X\big(group(X) \to (X \subset V)\big)$	*Assumption*	*3*
4	$group(V)$	*Assumption*	*4*
5	$group(V) \to \exists Y(group(Y) \wedge \neg(\lvert Y\rvert = \lvert V\rvert) \wedge \neg(\lvert Y\rvert < \lvert V\rvert)))$	$1, \forall E$	*1*
6	$\exists Y(group(Y) \wedge \neg(\lvert Y\rvert = \lvert V\rvert) \wedge \neg(\lvert Y\rvert < \lvert V\rvert))$	$4, 5, \to E$	*1,4*
7	$group(M) \wedge \neg(\lvert M\rvert = \lvert V\rvert) \wedge \neg(\lvert M\rvert < \lvert V\rvert)$	*Assumption*	*7*
8	$group(M) \wedge \neg(\lvert M\rvert = \lvert V\rvert) \wedge \neg(\lvert M\rvert < \lvert V\rvert)$	$6, 7, \exists E$	*1,4 (without 7)*
9	$group(M)$	$8, \wedge E$	*1,4*
10	$group(M) \to (M \subset V)$	$3, \forall E$	*3*
11	$M \subset V$	$9{,}10, \to E$	*1,3,4*
12	$\forall Y \Big(group(M) \wedge group(Y) \to \big((M \subset Y) \to \neg(\lvert Y\rvert < \lvert M\rvert)\big)\Big)$	$2, \forall E$	*2*
13	$group(M) \wedge group(V) \to \big((M \subset V) \to \neg(\lvert V\rvert < \lvert M\rvert)\big)$	$12, \forall E$	*2*
14	$group(M) \wedge group(V)$	$4{,}9, \wedge I$	*1,4*
15	$(M \subset V) \to \neg(\lvert V\rvert < \lvert M\rvert)$	$13{,}14, \to E$	*1,2,4*
16	$\neg(\lvert V\rvert < \lvert M\rvert)$	$11{,}15, \to E$	*1,2,3,4*
17	$\neg(\lvert M\rvert = \lvert V\rvert) \wedge \neg(\lvert M\rvert < \lvert V\rvert)$	$8, \wedge E$	*1,4*
18	$\neg(\lvert M\rvert < \lvert V\rvert)$	$17, \wedge E$	*1,4*
19	$\forall X \forall Y \Big(group(X) \wedge group(Y) \to \big(\neg(\lvert X\rvert < \lvert Y\rvert) \to (\lvert Y\rvert < \lvert X\rvert)\big)\Big)$	*Set Theory Ax.*	
20	$\forall Y \Big(group(M) \wedge group(Y) \to \big(\neg(\lvert M\rvert < \lvert Y\rvert) \to (\lvert Y\rvert < \lvert M\rvert)\big)\Big)$	$19, \forall E$	
21	$group(M) \wedge group(V) \to \big(\neg(\lvert M\rvert < \lvert V\rvert) \to (\lvert V\rvert < \lvert M\rvert)\big)$	$20, \forall E$	
22	$\neg(\lvert M\rvert < \lvert V\rvert) \to (\lvert V\rvert < \lvert M\rvert)$	$14{,}21, \to E$	*1,4*
23	$\lvert V\rvert < \lvert M\rvert$	$18{,}22, \to E$	*1,4*
24	$\neg group(V)$	$16{,}23, one\ of\ the\ "\neg"\ rules$	*1,2,3,4*
25	$\neg group(V)$	*Assumption*	*25*
26	$\neg group(V)$	$25, NDFOL\ Ax.$	*25*
27	$\forall X(group(X) \vee \neg group(X))$	*Mathematical Ax.*	
28	$group(V) \vee \neg group(V)$	$27, \forall E$	
29	$\neg group(V)$	$24{,}26{,}28, \vee E$	*1,2,3*

כאשר השורה האחרונה מתקבלת מכלל הסילוק $\frac{(\Gamma_1 \Rightarrow A \vee B \quad \{A\} \cup \Gamma_2 \Rightarrow C \quad \{B\} \cup \Gamma_3 \Rightarrow C)}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \Rightarrow C}$ $(\vee E)$ ע"י הצבת:

$\Gamma_1 = \emptyset, \Gamma_2 = \{1,2,3\}, \Gamma_3 = \emptyset, A = 4, B = 25, C = \neg group(V)$.

(3)

א. A נוסחה המקיימת: $Fv[A] = \{x, y\}$, d_1, d_2 קבועים שלא מופיעים ב-A. A t-ספיקה אמ"מ $A\{d_1/x, d_2/y\}$ ספיקה: **הטענה אינה נכונה**

להלן דוגמא נגדית: נסתכל על ה נוסחה $A \coloneqq (x \neq d_1) \wedge (y = d_2)$. ברור שהנוסחה t-ספיקה ע"י המבנה $M =< \{d_1, d_2, d_3\}, I >$ וההשמה v: $[x \coloneqq d_2, y \coloneqq d_2]$, אך הנוסחה $A\{d_1/x, d_2/y\}$ אינה t-ספיקה עבור שום מבנה ושום השמה:

- במבנה בו $D = \{d\}$ (ואז $d_1 = d_2$) וההשמה היחידה שמגדיר, ברור שלא מתקיים $(d \neq d)$, ולכן הנוסחה לא נכונה.
- בכל מבנה אחר בו $\{d_1, d_2\} \subseteq D$ ברור שלא מתקיים $(d_1 \neq d_1)$ ולכן הנוסחה לא נכונה.

ב. לכל מבנה M: M הוא v-מודל של $\forall xA \to \forall xB$ אמ"מ M הוא v-מודל של הנוסחה $\forall xB$ או M אינו מודל של הנוסחה $\forall xA$: **הטענה אינה נכונה**

להלן דוגמא נגדית: עבור המבנה $M =< \{d_1, d_2\}, I >$ והנוסחאות $A \coloneqq (z = y), B \coloneqq (y \neq y)$ מתקיים:

- אמנם $M \nvDash \forall xB$ אבל $M \nvDash \forall xA$, כיוון שעבור ההשמה v: $[z \coloneqq d_1, y \coloneqq d_2]$ מתקיים $M, v \nvDash \forall x(z = y)$.
- לעומת זאת $M \nvDash \forall xA \to \forall xB$ כיוון שעבור ההשמה v: $[z \coloneqq d_1, y \coloneqq d_1]$ מתקיים החלק השמאלי של החץ (כי $z = y$) ולא מתקיים החלק הימני של החץ (כי $y = y$ תמיד). לפיכך מתקיים $M, v \nvDash \forall xA \to \forall xB$, ולכן $M \nvDash \forall xA \to \forall xB$.

לפיכך לא מתקיים יחס אמ"מ ולכן הטענה אינה נכונה.

ג. לכל נוסחה A, ש"ע s_1, s_2 ומשתנים x, y מתקיים: $A\{s_1/x\}\{s_2/y\} = A\{s_1/x, s_2/y\}$: **הטענה לא נכונה**

להלן דוגמא נגדית: עבור $s_1 = y, s_2 = z, A \coloneqq (x = y)$, מתקיים:

- $A\{s_1/x\}\{s_2/y\} = (y = y)\{s_2/y\} = (z = z)$
- $A\{s_1/x, s_2/y\} = (y = z)$

מעל המבנה $M =< \{d_1, d_2\}, I >$ ברור שמתקיים $M \vDash (z = z)$ וגם $M \nvDash (y = z)$, ולכן לא מתקיים השוויון בין הנוסחאות

ד. אם s חופשי להצבה במקום x ב-A, אז לכל מבנה M והשמה v מתקיים: $M, v \vDash A\{s/x\} \to \exists xA$: **הטענה נכונה**

יהיו M מבנה ו-v השמה. $M, v \vDash A\{s/x\} \to \exists xA$ אמ"מ $M, v \vDash \exists xA$ או $M, v \nvDash A\{s/x\}$. נניח תחילה כי $M, v \vDash \exists xA$, הנכונות מיידית. נניח כעת כי $M, v \nvDash \exists xA$, אז מכאן מתקיים $M, v \vDash \neg\exists xA$ ובאופן שקול: $M, v \vDash \forall x\neg A$. מכאן, לכל v' x-וריאנט של v מתקיים $M, v' \vDash \neg A$. בפרט מתקיים עבור $v' = v[x \coloneqq v[s]]$ ש-$M, v[x \coloneqq v[s]] \vDash \neg A$ ובאופן שקול $M, v \vDash \neg A\{s/x\}$, ומכאן $M, v \nvDash A\{s/x\}$. מכאן שהטענה אינה נכונה.

(4)

להלן הוכחה ש-$T \vdash_{FOL}^{v} A \Leftrightarrow \forall T \vdash_{FOL}^{v} \forall A$:

מספיק להראות שלכל קבוצת נוסחאות Γ מתקיים $M \vDash \Gamma$ אמ"מ $M \vDash \forall\Gamma$. אם נראה זאת אז:

- אם $T \vdash_{FOL}^{v} A$, נוכיח $\forall T \vdash_{FOL}^{v} \forall A$ ע"י כך שנראה שלכל מבנה M מתקיים $M \vDash \forall T \Rightarrow M \vDash \forall A$:

$$M \vDash \forall T \underset{\text{נוכיח}}{\Longleftrightarrow} M \vDash T \xRightarrow[T \vdash_{FOL}^{v} A]{} M \vDash A \underset{\text{נוכיח}}{\Longleftrightarrow} M \vDash \forall A$$

- אם $\forall T \vdash_{FOL}^{v} \forall A$, ההוכחה ש-$T \vdash_{FOL}^{v} A$ דומה להוכחה לעיל.

אם כן תהי $\varphi \in \Gamma$ כך ש-$Fv[\varphi] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. נניח תחילה כי $M \vDash \varphi$, אזי לכל השמה v מתקיים $M, v \vDash \varphi$. בפרט, לכל v_1 x_1-וריאנט של v מתקיים $M, v_1 \vDash \varphi$ ולכן $M, v \vDash \forall x_1\varphi$. נמשיך כך גם ל- $x_2, \dots, x_n$ עד שנקבל $M, v \vDash \forall x_1 \dots \forall x_2\varphi$ ולכן $M, v \vDash \forall\varphi$, לכל השמה v. לכן $M \vDash \forall\varphi$.

נניח כעת כי $M \vDash \forall\varphi$, אז לכל השמה v_1 x_1-וריאנט של v מתקיים $M, v_1 \vDash \forall x_2 \dots \forall x_n\varphi$. נמשיך כך גם ל-$x_2, \dots, x_n$ ונקבל כי לכל השמה $v_{1,\dots,n}$ שהיא $\{x_1, \dots, x_2\}$-וריאנט של v מתקיים $M, v_{1,\dots,n} \vDash \varphi$, וכיוון שזה מתקיים לכל השמה כזו, אז $M \vDash \varphi$.

כיוון שהוכחה זו כללית לכל $\varphi \in \Gamma$, ברור כי מתקיים $M \vDash \forall\Gamma \Leftrightarrow M \vDash \Gamma$, ולכן הטענה מתקיימת.