סמסטר ב' מועד א' תשס"ט
תאריך הבחינה: 29.06.09

מבחן בלוגיקה למדעי המחשב

המרצה: פרופ' ארנון אברון

- משך הבחינה 3 שעות.
- אין להשתמש בחומר עזר.
- בחלק א' חובה לענות על כל השאלות. בחלק ב' עליכם לבחור שתיים מתוך שלוש שאלות.

בהצלחה!

חלק א'

יש לענות על שתי השאלות הבאות.

1. נתונה שפה מסדר ראשון עם שיוויון הכוללת בדיוק שני סימני פונקציה דו־מקומיים, סימן יחס חד־מקומי אחד וקבוע אחד.
הנח שהתחום מורכב מיצורים.

(א) הצרן בשפה הנ"ל את הטענות הבאות:

i. אם מזווגים יצור א' עם יצור ב', ואת התוצאה מזווגים עם יצור ג', אז מה שמתקבל זהה לתוצאת הזיווג של יצור א' עם תוצאת השידוך של יצור ב' עם יצור ג'.

ii. דרדסבא הוא יצור כחול, אך תוצאת הזיווג שלו עם תוצאת השידוך שלו עם עצמו אינה כחולה.

iii. קיימים יצורים כחולים שתוצאת הזיווג שלהם אינה כחולה.

(ב) קבע האם טענה (iii) נובעת לוגית מטענות (ii), (i).
אם כן ־ הוכח בעזרת דדוקציה טבעית או בעזרת משפט הרברנד.
אם לא ־ הפרך על ידי דוגמא נגדית.

2. תהיינה A, B נוסחאות כלשהן בלוגיקה מסדר ראשון.
הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) A v־ספיקה אם"ם $\forall A$ v־ספיק.
תזכורת: $\forall\varphi$ מסמן סגור אוניברסלי של φ.

(ב) אם $\forall A$ שקול לוגית ל־$\forall B$, אז A שקולה לוגית ל־B.

(ג) אם A, B פסוקים אז $A \wedge B$ ספיקה אם"ם $Sk(A) \wedge Sk(B)$ ספיקה, כאשר $Sk(A)$, $Sk(B)$ ־ שני פסוקים המתקבלים על ידי סקולמיזציה של A ו־B בהתאמה (במידה והוספו קבועים וסימני פונקציה, יש להניח שהם כולם שונים).

(ד) A תקפה אם"ם $\forall A$ נכון בכל מבנה הרברנד עבור השפה של A (הנח כי השפה מכילה לפחות קבוע אחד).

חלק ב'

יש לענות על שתיים מתוך שלוש השאלות הבאות.

3. תזכורת: פסוק נקרא יישי אם הוא מהצורה $\exists x_1 ... \exists x_n A$ כאשר A היא נוסחה חסרת כמתים.
הוכח: אם T תורה אוניברסלית בשפה עם קבוע, ו־φ פסוק יישי באותה שפה אז $T \vdash_{FOL} \varphi$ אם"ם קיים פסוק ψ כך ש־$T \vdash_{FOL} \psi$ ו־ψ הינו דיסיונקציה של אינסטנציות סגורות של המטריצה של φ.

4. נגדיר שתי לוגיקות תלת־ערכית L_3, L_3' בצורה הבאה:
קבוצת ערכי האמת: $S = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.
קבוצת ערכי האמת המצוינים (*designated*) ב־L_3 היא $D = \{1\}$, וקבוצת ערכי האמת המצוינים ב־L_3' היא $D = \{\frac{1}{2}, 1\}$.
פונקציות האמת של הקשרים $\neg, \vee$ מוגדרות לכל $a, b \in S$ באופן הבא:

$$\neg^*(a) = 1 - a$$

$$\vee^*(a, b) = max(a, b)$$

הקשר $\to$ מוגדר באמצעות הקשרים $\neg, \vee$ ע"י $A \to B \equiv \neg A \vee B$.
יהיו A, B נוסחאות ו־T תורה. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) $A, A \to B \vdash_{L_3} B$.

(ב) $A, A \to B \vdash_{L_3'} B$.

(ג) אם $T, A \vdash_{L_3} B$ אז $T \vdash_{L_3} A \to B$.

(ד) אם $T, A \vdash_{L_3'} B$ אז $T \vdash_{L_3'} A \to B$.

5. המערכת $NDFOL'$ מתקבלת מהמערכת $NDFOL$ ע"י החלפת הכללים $(\neg E),\ (\neg I)$ בכלל הבא:

$$\frac{\Gamma, \neg A \Rightarrow B \quad \Gamma, \neg A \Rightarrow \neg B}{\Gamma \Rightarrow A}$$

הוכח כי המערכת $NDFOL'$ שקולה למערכת $NDFOL$, כלומר, $T \vdash_{NDFOL} A \Leftrightarrow T \vdash_{NDFOL'} A$.

- בהצלחה! -

מערכת $HFOL$:

1. אקסיומות של HPC:

(a) (I1) $(A \to (B \to A))$
(b) (I2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
(c) (N1) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
(d) (N2) $\neg\neg A \to A$
(e) (C1) $A \wedge B \to A$
(f) (C2) $A \wedge B \to B$
(g) (C3) $A \to (B \to A \wedge B)$
(h) (D1) $A \to A \vee B$
(i) (D2) $B \to A \vee B$
(j) (D3) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$

.2

$$(i)\ \forall x(B \to A) \to (\exists x B \to A)$$

$$(ii)\ \forall x(A \to B) \to (A \to \forall x B)$$

כאשר $x \notin FV(A)$.

.3

$$(i)\ \forall x A \to A\{t/x\}$$

$$A\{t/x\} \to \exists x A$$

כאשר t חופשי להצבה במקום x ב-A.

4. כללי היסק:

$$\frac{A \quad A \to B}{B}\ (MP) \qquad \frac{A}{\forall x A}\ (Gen)$$

The system $\underline{NDFOL}$:

$$(ax)\ \{A\} \cup \Gamma \Rightarrow A$$

$$\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B}\ (\wedge I) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow B}\ (\wedge E_1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow A}\ (\wedge E_2)$$

$$\frac{\Gamma \cup \{A\} \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \to B}\ (\to I) \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow A \to B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B}\ (\to E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\vee I_1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ (\vee I_2) \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \vee B \quad \{A\} \cup \Gamma_2 \Rightarrow C \quad \{B\} \cup \Gamma_3 \Rightarrow C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \Rightarrow C}\ (\vee E)$$

$$\frac{\{A\} \cup \Gamma_1 \Rightarrow B \quad \{A\} \cup \Gamma_2 \Rightarrow \neg B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \neg A}\ (\neg I) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A}{\Gamma \Rightarrow A}\ (\neg\neg E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A\{y/x\}}{\Gamma \Rightarrow \forall x A}\ (**)(\forall I) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \forall x A}{\Gamma \Rightarrow A\{t/x\}}\ (*)(\forall E)$$

$$\frac{\Gamma \Rightarrow A\{t/x\}}{\Gamma \Rightarrow \exists x A}\ (*)(\exists I) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \exists x A \quad \Gamma, A\{y/x\} \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}\ (**)(\exists E)$$

(*) - t is free for x in A
(**) - y is free for x in A and does not occur free in $\Gamma \cup \{\exists x A, C\}$

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

42

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

תאריך הבחינה 29/6/09

שם הקורס לוגיקה למדמ"ח

שם המורה פרופ' ארנון אברון

החוג/המגמה מדעי המחשב

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים. 24

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

25

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה. 19
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח. 13
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר,יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	91
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	ארנון אברון

11309

24 ①

25 ②

(1) הגדרת השפה: המשתנים היחידים הם x,y,z

(א) • קבוע: d (דרקולה)

• פונקציות: $mate: \iota^2 \longrightarrow \iota$ (זיווג)

$match: \iota^2 \longrightarrow \iota$ (שידוך)

• סימן יחס: $blue: \iota \longrightarrow o$ (כחול)

ההגדרות:

✓ (i) $\forall x \forall y \forall z \, (mate(mate(x,y), z) = mate(x, match(y,z)))$

✓ (ii) $blue(d) \land \neg blue(mate(d, match(d,d)))$

✓ (iii) $\exists x \exists y \, (blue(x) \land blue(y) \land \neg blue(mate(x,y)))$

(ב) נסמן את הפסוקים ב-(i) כ-φ_1, (ii) - φ_2 ו-(iii) - φ_3.

נוכיח כי $\varphi_1, \varphi_2 \vdash_{FOL} \varphi_3$ ולשם כך נראה כי $T = \{\varphi_1, \varphi_2, \neg\varphi_3\}$ אינה ספיקה ולשם כך $T' = Sk(T)$ אינה ספיקה. נבנה את T'.

$$Sk(\varphi_1) = \varphi_1 \quad , \quad Sk(\varphi_2) = \varphi_2$$

$$\neg\varphi_3 \equiv \forall x \forall y \, (\neg blue(x) \lor \neg blue(y) \lor blue(mate(x,y))) = \Psi_3$$

לפי משפט הרברנד,

$$\Rightarrow Sk(\neg\varphi_3) = \Psi_3$$

ידוע כי T' אינה ספיקה אם"ם קבוצת האינסטנסים הסגורים של הפסוקים ב-T' אינה ספיקה, כאשר (נסמן T^*) היקום מעל מרחב הרברנד.

$\{d, match(d,d), mate(d,d), \dots\}$ (קבוצה אינסופית). נבנה את T^*:

$$T^* = \{ blue(d) \land \neg blue(mate(d, match(d,d))), \quad = A_1$$

$$mate(mate(d,d), d) = mate(d, match(d,d)), \quad = A_2$$

$$\neg blue(mate(d,d)) \lor \neg blue(d) \lor blue(mate(mate(d,d), d)), \quad = A_3$$

$$\neg blue(d) \lor \neg blue(d) \lor blue(mate(d,d)) \quad = A_4$$

$\dots \}$ (ומסתכם אח)

נניח כי T^* ספיקה במובן תחשיב הפסוקים, כלומר יש לה השמה מספקת V ונגיע לסתירה:

• $V \models A_1$ ($V(A_1) = t$ כי מדובר בתחשיב הפסוקים) ולכן $V \models blue(d)$, ולכן יש כי $V \models A_4$ חייב להתקיים ש-$V \models blue(mate(d,d))$.

• לפי אקסיומת השיוויון שמתקיימת ב-L (שפה עם שוויון), ב-T^* נמצא גם האינסטנס הבא:

$$A_5 = (\underbrace{mate(mate(d,d),d)}_{B_1} = \underbrace{mate(d, match(d,d))}_{B_2}) \longrightarrow (blue(B_1) \longleftrightarrow blue(B_2))$$

ולכן נקבל שחייב ש- $v \models A_1$ אז $v \models \neg blue(mate(d, mate(d,d)))$

וכן לפי רק ש- $v \models A_c$ ו- $v \models A_2$ ויהיה: $v \models \neg blue(mate(mate(d,d),d))$

• כיון ש- $v \models A_3$ אז לפי 2 הנכונים אם זה, מתקיים:

$$v \not\models blue(mate(mate(d,d),d)) \Leftarrow v \models \neg blue(mate(mate(d,d),d))$$

$$v \not\models \neg blue(d) \Leftarrow v \models blue(d)$$

$$v \not\models \neg blue(mate(d,d)) \Leftarrow v \models blue(mate(d,d))$$

$\Leftarrow$ $v \not\models A_3$, בסתירה.

סיכך, T^{*} אינה עקבית, לכן מה שאמרנו קודם ויוצא

ש- $\varphi_1, \varphi_2 \vdash_{FOL} \varphi_3$, כנדרש. $\square$

(2) (א) A v-ספיקה $\Longleftrightarrow$ $\forall A$ v-ספיק : <u>הטענה נכונה</u>

<u>הוכחה:</u>

תהי A נוסחה כלשהי כך ש- $Fv[A] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, ניקח את $\forall A$ להיות $\forall A = \forall x_1 \dots \forall x_n A$.

נניח תחילה כי $\forall A$ v-ספיקה, אזי קיים מבנה M כך שלכל השמה במבנה v מתקיים: $M, v \models \forall x_1 \dots \forall x_n A$, ולכן לפי הגדרה לכל v_1 שהיא x_1-וריאנט של v מתקיים $M, v_1 \models \forall x_2 \dots \forall x_n A$. נמשיך כך עד שנקבל שבכל מקרה מתקיים לפי הגדרה לכל $v_{1,\dots,n}$ שהוא $\{x_1, \dots, x_n\}$-וריאנט של v מתקיים $M, v_{1,\dots,n} \models A$. ומכיוון שזה מתקיים לכל $v_{1,\dots,n}$ כזו, ובפרט לכל v במבנה M, ולכן ניתן לומר: $M, v \models A$ לכל השמה v, ולפיכך $M \models A$, ולכן A היא v-ספיקה.

נניח כעת כי A v-ספיקה, אזי קיים M מבנה כך ש- $M \models A$, כלומר לכל השמה v במבנה מתקיים: $M, v \models A$. מכיוון שזה לכל השמה v, ניתן לומר שגם לכל v' שהוא x_n-וריאנט של v, והשוויון הכבד בין להגדיר v' או v, ולכן $M, v' \models A$, לכל v' כזו, ולכן לפי הגדרה $M, v \models \forall x_n A$. ונמשיך כך עד x_{n-1} ועד x_1 ולבסוף נקבל כי לכל השמה v: $M, v \models \forall x_1 \dots \forall x_n A$, ולכן $M \models \forall A$, ומכאן ש- $\forall A$ v-ספיקה, כנדרש. $\square$

(ב) אם $\forall A$ שקול לוגית ל- $\forall B$ אז A שקולה לוגית ל- B : <u>הטענה לא נכונה</u>

ניתן דוגמה נגדית: $A = (x = c)$, $B = (y = c)$ כאשר c קבוע,

x, y משתנים. δ נוסחאות ולכן המשתנים החופשיים: $\forall A = \forall x (x=c)$ ו- $\forall B = \forall y (y=c)$.

לפי כלל α, מתקיים: $\forall B = \forall y (y = c) \equiv \forall x (x=c)$ שכן x אינו חופשי (אינו מופיע כלל) ב- $\forall B$, ולכן $\forall A \equiv \forall B$. לעומת זאת, לא מתקיים $A \equiv B$

שכן לא מתקיים: $(x=c) \equiv (y=c)$, למשל הוכחה: נגדיר המבנה $M = \langle D, I \rangle$ המקיים. $D = \{a, b\}$, $I[=] = \{\langle a,a \rangle | a \in D\}$, $I[c] = a$ וההשמה v המקיימת $v[x] = a$ ו- $v[y] = b$, מתקיים: $M, v \models (x = c)$ אבל $M, v \not\models (y = c)$. ולכן לא יתכן ש- $A \equiv B$, ולכן הטענה אינה נכונה.

בצורת PNF

(ג) A,B פסוקים, $A\wedge B$ ספיקה $\Leftrightarrow$ $Sk(A)\wedge Sk(B)$ ספיקה: הוכחה

הוכחה באינדוקציה על מספר A,B תחת הקוונטיפיקציה:

בסיס: אם A,B פסוקים של ... כמתים קיימים, אז $Sk(A)=A$ ו- $Sk(B)=B$ ולכן בוודאי ש- $Sk(A)\wedge Sk(B) = A\wedge B$, ולכן הטענה בוודאי מתקיימת.

מעבר: לפי הגדרת הפסוקים של $A\wedge B$ ... ב-A מופיעים כמתים ... ב-B.
... כמתים רק על אחד מהם ... ו- A הפסוק (אין שינוי ... של ...),
... את הכמתים של ... A,B ... קודם. למשל, אם $A = \forall x\, p(x)$
ו- $B = \forall y\, p(y)$; $(\forall x\, p(x) \wedge \forall y\, p(y)) = \forall y(\forall x\, p(x) \wedge p(y))$ ... וכך גם ל- $\exists$
לכן בלי הגבלת הכלליות — מספיק לבדוק מקרה האחרון של מבנה A
ומקרה ש- A ו- B מופיעים ... שונים.

1) נניח כי $A = \exists y \varphi$ כאשר φ כבר ... קלוז ..., אזי מתקיים כי
$A\wedge B = \exists y \varphi \wedge B \equiv \exists y(\varphi\wedge B)$

$Sk(A)\wedge Sk(B) = Sk(\exists y\varphi)\wedge Sk(B) = \varphi\{c/y\}\wedge Sk(B) \overset{\text{שקילות}}{\equiv} Sk(\varphi\{c/y\}\wedge B)$

כאשר c קבוע חדש ... האחרון מתקיים ... הנחת האינדוקציה מתקיימת על $\varphi\{c/y\}$
... שקילות ... את ... ונקבל ... שקול.

$Sk(A\wedge B) = Sk(\exists y(\varphi\wedge B)) = Sk(\varphi\{c/y\}\wedge B)$ ... מתקיים.

לפי ... מהנחת האינדוקציה
כאשר c קבוע חדש

ומכאן כי $A\wedge B$ ספיקה אמ"מ $Sk(A\wedge B)$ ספיקה אמ"מ $(A\wedge B)$ ... $Sk(A)\wedge Sk(B)$
ספיקים ... לפי ספיקה אמ"מ

2) אם מהצורה $A = \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y \varphi$ אז:

$A\wedge B = \forall x_1\ldots\forall x_n \exists y\varphi \wedge B \equiv \forall x_1\ldots\forall x_n\exists y(\varphi\wedge B)$

$Sk(A)\wedge Sk(B) = Sk(\forall x_1\ldots\forall x_n\exists y\varphi)\wedge Sk(B) = \forall x_1 \ldots \forall x_n\,\varphi\{\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{y}\}\wedge Sk(B) =$

$\underbrace{\equiv}_{\text{שקילות}}$ $Sk(\forall x_1\ldots\forall x_n(\varphi\{\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{y}\}\wedge B))$ כאשר f סימן פונקציה חדש n מקומי.

והמעבר האחרון מתקיים לפי ה"א על $\varphi\{\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{y}\}$.

מהנחת ...

וכן $Sk(A\wedge B) \equiv Sk(\forall x_1\ldots\forall x_n\exists y(\varphi\wedge B)) = Sk(\forall x_1\ldots\forall x_n(\varphi\{\frac{f(x_1,\ldots,x_n)}{y}\}\wedge B))$

לכן $A\wedge B$ ו- $Sk(A)\wedge Sk(B)$ ספיקים ... ספיק אמ"מ.

(5) A תקפה (לכל מבנה M: $M \models A$) $\iff$ $M(L) \models \forall A$ לכל מבנה הרברנד $M(L)$ של השפה L

<u>הטענה לא נכונה</u>

להלן דוגמא נגדית: תהי L שפה עם קבוע יחיד c, פרדיקט חד מקומי יחיד p

<u>וללא סמני פונקציה</u>. (נגדיר) את הנוסחה $A = p(x) \vee \neg p(y)$

הסגור של נוסחה זו יהיה $\forall A = \forall x \forall y (p(x) \vee \neg p(y))$

כיון שאין בשפה סימני פונ' מבנה הרברנד הוא: $H(L) = \{c\}$

ועבורו c' רק 2 מבני הרברנד אפשריים: $M_1(L) = \langle \{c\}, I_1 \rangle$

כאשר: $I_1[p] = \{c\}$

והמבנה השני המתקבל משינוי הפירוש ל-p: $M_2(L) = \langle \{c\}, I_2 \rangle$

כאשר: $I_2[p] = \emptyset$

נשים לב שמתקיים: $M_1(L) \models \forall x \forall y (p(x) \vee \neg p(y))$

כיון שלכל השמה v במבנה זה הנ"ל מתקיים, כיון שלכל x,y - ורסיון שלה (v') מתקיים $M, v' \models p(x) \vee \neg p(x)$, כאשר v' הוא השמה v, ולכן גם לכל השמה v.

כיון שבמבנים c' רק יש c, ברור שמתקיים $p(c) \vee \neg p(c)$.

ובאותו אופן מתקיים גם $M_2(L) \models \forall x \forall y (p(x) \vee \neg p(y))$ ולכן לכל מבנה הרברנד של השפה מתקיים $M(L) \models \forall A$.

ואולם: הנוסחה A <u>לא</u> תקפה. נראה זאת בעזרת המבנה וההשמה:

$M = \langle \{1,2\}, I \rangle$, $I[c]$ - לא חשוב, $x \in I[p] \iff$ x זוגי,

$v[x] = 1,\ v[y] = 2 \implies M, v \not\models p(x) \vee \neg p(y)$

ולכן A לא תקפה, כדרוש. $\blacksquare$

(5) כדי להוכיח את שקילות המערכות, מספיק להוכיח שהכללים $(\neg I)$, $(\neg E)$ של NDFOL גזירים ב-NDFOL*, וכי הכלל החדש, (שנוי) $(\neg *)$ גזיר ב-NDFOL. זאת כי הוכחה במערכת אחת ניתן להפוך להוכחה במערכת השניה. (החלפת שימוש בכללי המערכות הראשונה).

נראה תחילה כי $(\neg *)$ גזיר ב-NDFOL, כלומר: נניח כי: $\Gamma, \neg A \Rightarrow B$ וכי $\Gamma, \neg A \Rightarrow \neg B$ ונוכיח ש- $\Gamma \Rightarrow A$.

להלן הוכחה ב-NDFOL:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg A, \Gamma \Rightarrow B \quad \neg A, \Gamma \Rightarrow \neg B}{\Gamma \cup \Gamma \Rightarrow \neg\neg A}\ (\neg I)}{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A}\ \Gamma \cup \Gamma = \Gamma}{\Gamma \Rightarrow A}\ (\neg E)$$

הנחה -- $\neg A, \Gamma \Rightarrow B$; $\neg A, \Gamma \Rightarrow \neg B$ -- הנחה

לפי $(\neg I)$ -- $\Gamma \cup \Gamma \Rightarrow \neg\neg A$

כי $\Gamma \cup \Gamma = \Gamma$ ... $\Gamma \Rightarrow \neg\neg A$

לפי $(\neg E)$ -- $\Gamma \Rightarrow A$

כעת נראה כי $(\neg E)$ גזיר ב-NDFOL*, כלומר נניח כי $\Gamma \Rightarrow \neg\neg A$ ונראה הוכחה ב-NDFOL* ל- $\Gamma \Rightarrow A$.

הנחה ... $\Gamma \Rightarrow \neg\neg A$

הרחבת הנחות ... $\Gamma, \neg A \Rightarrow \neg\neg A$; $\Gamma, \neg A \Rightarrow \neg A$ --- אקסיומה

לפי כלל $(\neg *)$ $\Gamma \Rightarrow A$

□

כעת נראה כי $(\neg I)$ גזיר ב-NDFOL*: נניח כי $\Gamma_1, A \Rightarrow B$, $\Gamma_2, A \Rightarrow \neg B$ ונראה הוכחה ב-NDFOL* ל- $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \neg A$ (על ידי שימוש ב-$(\neg E)$ שהוכחנו שגזיר):

הנחה -- $\Gamma_1, A \Rightarrow B$; אקסיומה $\neg\neg A \Rightarrow \neg\neg A$; $\Gamma_2, A \Rightarrow \neg B$ הנחה

$(\to I)$ $\Gamma_1 \Rightarrow A \to \neg B$; $\neg\neg A \Rightarrow A$ $(\neg E)$; $\Gamma_2 \Rightarrow A \to \neg B$ -- $(\to I)$

לפי $(\to E)$ -- $\Gamma_1, \neg\neg A \Rightarrow B$; $\Gamma_2, \neg\neg A \Rightarrow \neg B$ -- $(\to E)$

הרחבת הנחות ... $\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \neg\neg A \Rightarrow B$; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \neg\neg A \Rightarrow \neg B$

לפי $(\neg *)$ $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \neg A$

□

ולכן המערכות NDFOL ו-NDFOL* שקולות.

(2) נניח כי T היא תורה אוניברסלית בשפה עם קבוע ו-φ פסוק ישי

בשפה (L) אזי: $T \vdash_{FOL} \varphi \iff$ קיים פסוק ψ כך ש- $T \vdash_{FOL} \psi$

ו-ψ הוא דיסיונקציה של אינסטנסים סגורים של המטריצה של φ.

נניח תחילה כי $T \vdash_{FOL} \varphi$ ונראה שקיים ψ כנדרש:

יהיו הקבועים הקיימים בשפה L: $\{d_1, \dots, d_k\}$ כאשר $k \geq 1$. נניח כי

$\varphi = \exists x_1 \dots \exists x_n A$ כאשר $Fv[A] = \{x_1, \dots, x_n\}$ ו-A נוסחה ללא כמתים.

נגדיר $\psi_i = A\{d_{j_1}/x_1, \dots, d_{j_n}/x_n\}$ כאשר d_{j_i} הם

קבועים כלשהם מתוך קבועי השפה. וכך נקח את כל ψ_i השונים האפשריים

(יש n^k כאלו). אז: $\psi = \bigvee_{i=1}^{n^k} \psi_i$. כעת, יהי M מודל של T,

אזי לפי ההנחה הוא מודל של φ. $M \models \varphi$, כלומר $M \models \exists x_1 \dots \exists x_n A$

ומכאן, קיימים בתחום $a_1, \dots, a_n \in D$ $(M = \langle D, I \rangle)$ כך ש- "$M \models A\{a_1/x_1, \dots, a_n/x_n\}$".

- המסקנה היא כי אין שום לערכם את הקבועים, מהתחום, אלו הם $a_1, \dots, a_n$, של

השפה, ולכן הנוסחה היא שווה קיימת בתחום $a_1, \dots, a_n$ רק שהצבתם בתוך A מהווה

לסופיק.

(4) (א) $A, A \to B \vdash_{L_3} B$: הסקה נכונה

יהי v מודל של A, $A \to B$ מעל L_3. אזי $v(A) = 1$ ו- $v(A \to B) = 1$

ולפי ההגדרה: $A \to B$: $\neg A \vee B$. אזי: $v(\neg A \vee B) = 1$. מתקיים:

$v(A) = 1$ ולכן $v(\neg A) = 0$ (כי $\neg^* 1 = 1 - 1 = 0$). כיון ש- $v(\neg A \vee B) = 1$

אזי $1 = \max(0, B)$ ולכן בהכרח: $v(B) = 1$ לסיכך הסקה נכונה.

(ב) $A, A \to B \vdash_{L_3'} B$: הסקה לא נכונה.

נניח כי v מודל של A, $A \to B$ מעל L_3'. אזי: $v(A) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ וגם $v(\neg A \vee B) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$.

נניח כי $v(A) = \frac{1}{2}$, אזי: $v(\neg A) = \frac{1}{2}$ ולכן $v(\neg A \vee B) = \max(\frac{1}{2}, v(B)) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$.

וגם זה מתקיים גם עבור $v(B) = 0$ כיון $\max(\frac{1}{2}, 0) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$ כפי שראינו,

וגם $v(B) \notin \{\frac{1}{2}, 1\}$. לסיכך $A, A \to B \nvdash_{L_3'} B$ ולכן הסקה לא נכונה.

[illegible]

B | A | e

[illegible]

(ב) אם $T, A \vdash_{L_3} B$ אז $T \vdash_{L_3} A \to B$: הטענה לא נכונה

... אם $A \vdash_{L_3} B$

אז $A \to B$ ... $\nvdash_{L_3} A \to B$:

נראה כי $A \vdash_{L_3} B$ ...

V ...

$V(A) = 1 \Rightarrow V(B) = 1 \Rightarrow V(\neg A \vee B) = \max(0, 1) = 1$

ואם במקרה ... V ... $V(B) = \frac{1}{2}$ ...

$V(A) = \frac{1}{2}$, $V(B) = \frac{1}{2}$: $V(A \vee B) = \max(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \neq 1$

ולכן ... V ... $V \nvDash A \to B$ ולכן $\nvdash_{L_3} A \to B$.

לא הגדרת כלומר מהן הנוסחאות. A:=.. B:=..

10 להוכחה אבל אפסי.

(ג) אם $T, A \vdash_{L_3} B$ אז $T \vdash_{L_3} A \to B$: הטענה נכונה.

נניח כי $T, A \vdash_{L_3} B$ ... $T \cup \{A\}$ ... B.

V מודל של T, כלומר $V \models T$.

אם V מודל של A אז $V \models T$ וגם $V \models A$ ולכן לפי הנתון $V \models B$.

נכון!

אם V לא מודל של A ... $V(A) = 0$ ...

$V(A \to B) = V(\neg A \vee B) = \max(1-0, V(B)) = 1$

ולכן $V(A \to B) \in \{\frac{1}{2}, 1\}$, כלומר $V \models A \to B$.

בכל מקרה קיבלנו ש- $V \models A \to B$ (כאשר $V \models T$ ומכאן הטענה)

ולכן הטענה נכונה.