# <u>סיכומים לקורס לוגיקה למדמ"ח</u>

## סמסטר ב' תשס"ט (פרופ' ארנון אברון)

### רכיבי מערכות לוגיות:

1. <u>שפה פורמלית</u>: מייצרת מחרוזות סימנים, תחביר מדויק. מרכיבי השפה:
   א. <u>א"ב</u>: בד"כ סופי ולכל היותר בן מניה. יסומן באות $L$.
   ב. <u>קטגוריות סינטקטיות</u>: אחת מהן היא הקטגוריה של הנוסחאות בשפה , תסומן $o$ (אומיקרון). קטגוריות נוספות: ש"ע, קשרים, כמתים וכד'. לכל קטגוריה מתאימה קבוצה חלקית של $L$, שתכיל את המחרוזות השייכות לקטגוריה זו.
2. <u>יחס נביעה</u> <u>(*consequence relation*)</u>: יסומן $\vdash$; יחס בין קבוצות של נוסחאות לנוסחאות המקיים:
   א. "רפלקסיביות": בהינתן קבוצת הנחות $T$, מתקיים לכל $A \in T$: $T \vdash A$.
   ב. מונוטוניות: אם $T \subseteq S$ ו-$T \vdash A$ אז $S \vdash A$.
   ג. "טרנזיטיביות": אם $T \vdash A$ ו-$T \cup \{A\} \vdash B$ אז $T \vdash B$.

הקישור בין הלוגיקה הפורמלית ובין שימושים בה נעשה ע"י תהליך ה<u>הצרנה</u>.

### <u>חלק ראשון: תחשיב הפסוקים הקלאסי - *CPL*</u>:

**הגדרה:**

1. <u>השפה</u> ($\mathfrak{L}pc$):
   א"ב:
   - רשימה בת מניה של פסוקים אטומים / משתנים אטומים: $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
   - קשרים: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$.
   - "(", ")" – סוגריים.
2. <u>נוסחאות</u>: נקראות בתחשיב זה גם פסוקים, קטגוריה סינטקטית יחידה. הגדרה רקורסיבית:
   - כל פסוק אטומי הוא נוסחה (פסוק). יסומנו ע"י המשתנים $p, q, r$ - משתנים ב-<u>מטה-שפה</u> עבור משתני השפה $p_1, p_2, \ldots$.
   - אם $\varphi, \psi$ נוסחאות אז גם $\neg\varphi, \varphi\wedge\psi, \varphi\vee\psi, \varphi \rightarrow \psi$ נוסחאות. יסומנו ע"י המשתנים $\varphi, \psi$ או $A, B, C$ - משתנים ב-<u>מטה-שפה</u>.

   <u>קדימויות</u>: $\neg$, לאחריו $\wedge, \vee$, לאחריהם $\rightarrow$. כמו כן $A \rightarrow B \rightarrow C$ הוא קיצור ל-$A \rightarrow (B \rightarrow C)$.

**סוגי אינדוקציות:**

1. אינדוקציה על אורך הנוסחה. שלב המעבר: מסתכלים על נוסחה באורך $n+1$ המכילה נוסחאות עליהן חלה הנחת האינדוקציה שאורכן $\leq n$. משתמשים באינדוקציה זו כאשר נתון משהו יכיח.
2. אינדוקציה מבנית – על מבנה הנוסחה. בסיס על פסוקים אטומים, מעבר ע"י הנחה על נוסחאות $\varphi, \psi$ והוכחה ל-$\neg\varphi, \varphi * \psi$ ($* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$).
   יש לציין (למרות שטרוויאלי) ש-$\varphi$ קצרה מ-$\neg\varphi$ ו-$\varphi, \psi$ קצרות מ-$\varphi * \psi$.

לכל נוסחה יש סדרת בניה, החל מפסוקים אטומים. כל אינדוקציה מבנית ניתנת למעבר לאינדוקציה רגילה, כאשר $n$ הוא אורך סדרת הבניה. למשל הנוסחה $\neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3)$ מורכבת מסדרת הבניה: $p_1, \neg p_1, p_2, p_3, p_2 \vee p_3, \neg p_1 \rightarrow (p_2 \vee p_3)$ (שאורכה כאן 6). ניתן להתייחס גם לעץ בניה, ולהתייחס ל-$n$ כגובה העץ למשל.

**<u>הגדרת יחס הנביעה של תחשיב הפסוקים הקלאסי בצורה סמנטית - $\vDash_{CPL}$</u>:**

הגדרה סמנטית ליחס הנביעה מתבססת על <u>מודל</u>. מודל הוא <u>מבנה</u> $M$ כלשהו שהוא אוסף של דברים כלשהם (יוגדר בהמשך). יחס ה<u>סיפוק</u> $\vDash$ מתקיים בין נוסחאות למבנים. נאמר ש-$M \vDash \varphi$ אם $M$ הוא מודל של $\varphi$, כלומר $M$ מספק את $\varphi$. מודל של קבוצת פסוקים $T$ מוגדר כמבנה שהוא מודל של כל $\varphi \in T$: $M \vDash T \Leftrightarrow \forall\varphi \in T. M \vDash \varphi$.

יחס הנביעה $\vdash$: נאמר כי $T \vdash \varphi$ אם כל מודל של $T$ הוא גם מודל של $\varphi$: $\forall M. M \vDash T \Rightarrow M \vDash \varphi$.

בתחשיב הפסוקים הקלאסי, המבנים הם פשוט פונקציות מקבוצת הפסוקים האטומים אל הקבוצה $\{t, f\}$. פונקציות אלו נראות <u>השמות</u>, נסמנן $v$.

<u>היחס $\vDash_{CPL}$</u>:

- לפסוקים אטומים: $v \vDash_{CPL} p \Leftrightarrow v(p) = t$.
- $v \vDash A \vee B$ אמ"מ $v \vDash A$ או $v \vDash B$.
- $v \vDash A \wedge B$ אמ"מ $v \vDash A$ וגם $v \vDash B$.
- $v \vDash A \rightarrow B$ אמ"מ $v$ <u>לא</u> מספק את $A$ או $v \vDash B$.
- $v \vDash \neg A$ אמ"מ $v$ <u>לא</u> מספק את $A$.

דרך נוספת להגדיר זאת היא ע"י הגדרת פונקציות $g_{\neg}:\{t,f\}\to\{t,f\}$ ,$g_{\to},g_{\vee},g_{\wedge}:\{t,f\}^2\to\{t,f\}$ המתארות טבלאות אמת של הקשרים השונים, ואז נאמר למשל: $v(\neg A)=g_{\neg}(v(A))$. $v$ היא <u>מודל</u> של $\varphi$ אמ"מ $v(\varphi)=t$.

<u>היחס $\vdash_{CPL}$</u>:

$T\vdash_{CPL}\varphi$ אם כל מודל של $T$ הוא גם מודל של $\varphi$, כלומר אם כל השמה הנותנת ערך אמת $t$ לכל הפסוקים של $T$, נותנת ערך אמת $t$ גם ל-$\varphi$.

דרך ישירה לבדוק קיום יחס זה הוא לבדוק את טבלאות האמת של $T$ ושל $\varphi$, ולבדוק האם אכן לכל שורה בטבלת האמת, המגדירה השמה, אם כל פסוקי $T$ מקבלים $t$ גם $\varphi$ מקבלת $t$. מספיקה שורה אחת שלא תקיים זאת כדי להכריע שהיחס לא מתקיים.

**טענה**:

$T\vdash_{CPL}A \Leftrightarrow T\cup\{\neg A\}$ אינה ספיקה.

<u>ביסוס השימוש בטבלאות אמת</u>:

יצוין כי מספיק לבדוק טבלת אמת מעל הפסוקים האטומים המופיעים ב-$T\cup\{\varphi\}$, ולא כל $\aleph_0$ הפסוקים האטומים (הנותנים $\aleph$ השמות). כלומר:

**טענה**:

אם $v,v'$ השמות כך שלכל פסוק אטומי $p$ המופיע בנוסחה $\varphi$ מתקיים $v(p)=v'(p)$, אז $v(\varphi)=v'(\varphi)$. הוכחה ניתנה באינדוקציה מבנית.

<u>קבוצת הנוסחאות האטומיות</u>:

קבוצת הנוסחאות האטומיות (פסוקים אטומים) בנוסחה $\varphi$, תסומן $At(\varphi)$, מוגדרת:

- עבור $p$ פסוק אטומי: $At(p)=\{p\}$.
- $At(\neg\varphi)=At(\varphi)$.
- $At(\varphi*\psi)=At(\varphi)\cup At(\psi)$ כאשר $*\in\{\to,\wedge,\vee\}$.

<u>קבוצת תת הנוסחאות</u>:

- עבור $p$ פסוק אטומי: $Sf(p)=\{p\}$.
- $Sf(\neg\varphi)=Sf(\varphi)\cup\{\neg\varphi\}$.
- $Sf(\varphi*\psi)=Sf(\varphi)\cup Sf(\psi)\cup\{\varphi*\psi\}$.

<u>כריעות בעיות עם תורה סופית</u>:

עבור תורה $T$ סופית, קיים אלג' המכריע האם $T$ ספיקה (האם קיימת השמה $v$ כך ש-$v\vDash T$) והאם $T\vdash_{CPL}\varphi$. רדוקציה מהבעיה הראשונה לשניה:

- ידוע שמתקיים $T\vdash_{CPL}\varphi$ אמ"מ $T\cup\{\neg\varphi\}$ אינה ספיקה.
- $\{\psi_1,\dots,\psi_n\}\vdash_{CPL}\varphi$ אמ"מ $(\psi_1\wedge\dots\wedge\psi_n)\to\varphi$ הוא טאוטולוגיה (כלומר מסופק ע"י <u>כל</u> השמה).

**משפט הדדוקציה ב-*CPL***:

$T\vdash_{CPL}A\to B \Leftrightarrow T\cup\{A\}\vdash_{CPL}B$.

**משפט הקומפקטיות ב-*CPL***:

1. $T$ ספיקה אמ"מ כל $\Gamma\subseteq T$ סופית ספיקה.
2. $T\vdash_{CPL}\varphi$ אמ"מ קיימת $\Gamma\subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma\vdash_{CPL}\varphi$.

<u>**הגדרת יחס הנביעה של תחשיב הפסוקים הקלאסי בצורה סינטקטית – *HPC* (מע' נוסח הילברט לתחשיב הפסוקים)**</u>:

<u>אקסיומות</u>: יש לשים לב שאלו תבניות לאקסיומות. כדי לייצר אקסיומה יש להציב פסוקים כלשהם במקום $A,B,C$ בתבניות אלו, ולקבל <u>אינסטנציה</u>.

$I1.\ A\to(B\to A)$
$I2.\ (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$
$N1.\ (A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$
$N2.\ \neg\neg A\to A$
$C1.\ (A\wedge B)\to A$
$C2.\ (A\wedge B)\to B$
$C3.\ A\to(B\to(A\wedge B))$
$D1.\ A\to(A\vee B)$
$D2.\ B\to(A\vee B)$
$D3.\ (A\to C)\to((B\to C)\to((A\vee B)\to C))$

<u>כלל היסק</u>:

$$MP.\frac{A\quad A\to B}{B}$$

<u>הוכחה של פסוק $\varphi$ מתוך תורה $T$ ב-$HPC$</u>:

סדרה סופית של פסוקים כך ש:

- הפסוק האחרון בסדרה הוא $\varphi$.
- כל איבר בסדרה הוא אקסיומה של $HPC$, איבר של $T$ או מתקבל ע"י שני פסוקים קודמים כלשהם ע"י כלל $MP$.

<u>יחס הנביעה $\vdash_{HPC}$</u>:

נאמר כי $T\vdash_{HPC}\varphi$ אם ל-$\varphi$ הוכחה מ-$T$ ב-$HPC$.

**משפט הקומפקטיות ב-*HPC***:

$T\vdash_{HPC}\varphi$ אמ"מ קיימת $\Gamma\subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma\vdash_{HPC}\varphi$. ההוכחה טרוויאלית.

**משפט הנאותות והשלמות של <u>HPC</u>**: $\vdash_{HPC} = \vdash_{CPL}$

1. נאותות: $T \vdash_{HPC} \varphi \Rightarrow T \vdash_{CPL} \varphi$. כלומר: אם $\varphi$ יכיחה מ-$T$ ב-$HPC$, אז כל השמה של $T$ היא גם השמה של $\varphi$.
2. שלמות: $T \vdash_{CPL} \varphi \Rightarrow T \vdash_{HPC} \varphi$. כלומר: אם כל השמה של $T$ היא גם השמה של $\varphi$, אז $\varphi$ יכיחה מ-$T$ ב-$HPC$.

<u>הגדרת הצבה</u>:

תהי $\varphi$ נוסחה כלשהי, $p$ פסוק אטומי ו-$A$ נוסחה. אז:

$$\varphi\{A/p\} = \begin{cases} A, & \varphi = p \\ \varphi, & \varphi = q, q \neq p \\ \neg\psi\{A/p\}, & \varphi = \neg\psi \\ \psi_1\{A/p\} * \psi_2\{A/p\}, & \varphi = \psi_1 * \psi_2, * \in \{\to, \wedge, \vee\} \end{cases}$$

באותו אופן תוגדר הצבה <u>סימולטנית</u> $\varphi\{A_1/p_1, \dots, A_n/p_n\}$.

**משפט ההצבה**:

1. <u>עבור נוסחאות</u>:

תהי $\varphi$ נוסחה, $q_1, \dots, q_n$ פסוקים אטומים <u>שונים זה מזה</u>, $A_1, \dots, A_n$ נוסחאות (לא בהכרח שונות), תהי $v'$ ההשמה המוגדרת באופן הבא:

$$v'(p) = \begin{cases} v(A_i), p = q_i \\ v(p), \quad o/w \end{cases}$$

מתקיים: $v'(\varphi) = v(\varphi\{A_1/q_1, \dots, A_n/q_n\})$.

2. <u>עבור ש״ע</u>:

יהיו $x_1, \dots, x_n$ משתנים שונים, $s_1, \dots, s_n$ ש״ע, $v$ השמה ו-$t$ ש״ע. אז:

$$v\{x_1 := v[s_1], \dots, x_n := v[s_n]\}[t] = v[t\{s_1/x_1, \dots, s_n/x_n\}]$$

**משפט ההחלפה**:

1. <u>עבור נוסחאות</u>: יהיו $s_1, s_2$ ש״ע חופשיים להצבה במקום $x$ ב-$\varphi$ ו-$v[s_1] = v[s_2]$. אז: $M, v \vDash \varphi\{s_1/x\} \Leftrightarrow M, v \vDash \varphi\{s_2/x\}$.
2. <u>עבור ש״ע</u>: עבור $s_1, s_2, t$ ש״ע, $v$ השמה, אם $v[s_1] = v[s_2]$ אז $v[t\{s_1/x\}] = v[t\{s_2/x\}]$.

<u>הגדרה אינדוקטיבית ל-$T \vdash_{HPC} A$</u>:

א. אם $A \in T$ אז $T \vdash_{HPC} A$.

ב. אם $A$ אינסטנציה של אקסיומה ב-$HPC$, אז $T \vdash_{HPC} A$.

ג. אם $T \vdash_{HPC} B$ ו-$T \vdash_{HPC} A$ ו-$B \vdash_{HPC} A$ אז $T \vdash_{HPC} A$.

**משפט הדדוקציה של HPC**:

$T \vdash_{HPC} A \to B \Leftrightarrow T \cup \{A\} \vdash_{HPC} B$. לזכור שההוכחה שלו מתבססת רק על $(I1), (I2), MP$, במקרה של תרגיל בו מקבלים מערכת שונה מ-$HPC$.

<u>הכללה</u>: משפט הדדוקציה יהיה נכון לכל מערכת נוסח הילברט עבור שפת תחשיב הפסוקים הקלאסי, אם $MP$ הוא כלל ההיסק היחיד ואם כל האינסטנציות של $I1, I2$ יכיחות במערכת.

<u>מערכת HPI</u>:

לוגיקה פסוקית אינטואיציוניסטית המתקבלת ממערכת $HPC$ ע״י החלפת $N2. \neg\neg A \to A$ בכלל: $N2'. \neg A \to (A \to B)$. משפט הדדוקציה <u>נכון</u> ב-$HPI$ למרות שלא כל טאוטולוגיה ב-$HPC$ יכיחה ב-$HPI$. למשל: $((A \to B) \to A) \to A$.

**הקבלה של CPL ו-HPC**:

| | |
|---|---|
| טאוטולוגיה | משפט של $HPC$ (ניתן להוכחה ללא הנחות) |
| נביעה לוגית | יכיחות |
| סיפוק | קונסיסטנטיות |
| משפט הדדוקציה | |
| קומפקטיות: אם יש נביעה אז יש נביעה מתת קבוצה סופית | קומפקטיות: אם יש יכיחות אז יש סדרת הוכחה באורך סופי |

<u>קונסיסטנטיות ב-HPC</u>:

תורה $T$ היא קונסיסטנטית ב-$HPC$ אם לא קיימת נוסחה $A$ כך ש-$T \vdash_{HPC} A$ וגם $T \vdash_{HPC} \neg A$.

**טענה**: תורה $T$ היא קונסיסטנטית אמ״מ <u>קיים</u> פסוק $A$ כך ש-$T \nvdash_{HPC} A$ (כלומר $T$ אינה תורה טרוויאלית).

**משפט השלמות נוסח ב׳**:

תורה $T$ היא ספיקה (ב-$CPL$) אמ״מ היא קונסיסטנטית ב-$HPC$.

**משפט הקומפקטיות ב-$CPL$**:

- נוסח א׳: אם $T \vdash_{CPL} A$ אז קיימת קבוצה חלקית סופית $\Gamma \subseteq T$ כך ש-$\Gamma \vdash_{CPL} A$.
- נוסח ב׳: תורה $T$ היא ספיקה אמ״מ כל $\Gamma \subseteq T$ סופית שלה היא ספיקה.

**מערכת דדוקציה טבעית – $NDC$**:

אקסיומה: $\Gamma \Rightarrow A$, כאשר $A \in \Gamma$.

| כללי סילוק (קשרים למעלה) | כללי הכנסה (קשרים למטה) |
|---|---|
| $(\wedge E)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow A}\ ,\ \frac{\Gamma \Rightarrow A \wedge B}{\Gamma \Rightarrow B}$ | $(\wedge I)\ \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow A \wedge B}$ |
| $(\rightarrow E)\ \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow A \rightarrow B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B}$ | $(\rightarrow I)\ \frac{\Gamma \cup \{A\} \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \rightarrow B}$ |
| $(\vee E)\ \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \vee B \quad \{A\} \cup \Gamma_2 \Rightarrow C \quad \{B\} \cup \Gamma_3 \Rightarrow C}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \Rightarrow C}$ | $(\vee I)\ \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}\ ,\ \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B}$ |
| $(\neg E)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A}{\Gamma \Rightarrow A}$ | $(\neg I)\ \frac{\{A\} \cup \Gamma_1 \Rightarrow B \quad \{A\} \cup \Gamma_2 \Rightarrow \neg B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \neg A}$ |

כללי שלילה נוספים:

- $\Gamma \Rightarrow \neg A \vee A$ (לא תקף בלוגיקה אינטואיציוניסטית)
- $\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow \neg A}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B}$
- $\frac{\Gamma_1 \Rightarrow \neg A \quad \Gamma_2 \Rightarrow \neg B}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow \neg(A \vee B)}$
- $\frac{(\Gamma_1 \Rightarrow \neg A \quad \Gamma_2 \Rightarrow A \vee B)}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B}$

מערכת $NDI$:

מתקבלת ממערכת $NDC$ ע״י החלפת הכלל $\frac{\Gamma \Rightarrow \neg\neg A}{\Gamma \Rightarrow A}$ בכלל $\frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow \neg A}{\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \Rightarrow B}$.

סקוונט:

$\Gamma \Rightarrow A$ הוא סקוונט, כאשר $A$ נוסחה ו-$\Gamma$ קבוצה סופית של נוסחאות.

יחס הנביעה $\vdash_{NDC}$:

נאמר ש-$T \vdash_{NDC} A$ אם קיימת $\Gamma \subseteq T$ סופית כך שהסקוונט $\Gamma \Rightarrow A$ יכיח ב-$NDC$, או בקיצור $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$. נשים לב לרמות השפה השונות:

- מטה-שפה: $\ldots \vdash \ldots$
- שפת סקוונטים: $\Rightarrow$
- שפת תחשיב הפסוקים: $\wedge, \vee, \rightarrow$

יכיחות ב-$NDC$ מראים ע״י בניית הוכחה המתחילה תמיד באקסיומות והנחות.

$\vdash_{NDC}$, $\vdash_{NDI}$ הם יחסי נביעה, כלומר מקיימים רפלקסיביות, מונוטוניות וטרנזיטיביות כמוגדר קודם.

**משפט התקפות והשלמות ב-$NDC$**: $\vdash_{CPL} = \vdash_{NDC}$

1. תקפות: אם $T \vdash_{NDC} A$ אז $T \vdash_{CPL} A$. כלומר: אם ל-$A$ הוכחה מ-$T$ ב-$NDC$ אז השמה המספקת את $T$ מספקת גם את $A$.
2. שלמות: אם $T \vdash_{CPL} A$ אז $T \vdash_{NDC} A$. כלומר: אם כל השמה המספקת את $T$ מספקת גם את $A$, אז ל-$A$ הוכחה ב-$NDC$ מ-$T$.

**מתקיים:** $\vdash_{HPI} = \vdash_{NDI}$, $\vdash_{CPL} = \vdash_{NDC} = \vdash_{HPC}$

כדי להראות ש-$T \vdash_{HPC} A$ גורר $T \vdash_{NDC} A$: מניחים $T \vdash_{HPC} A$ ולכן $\Gamma \vdash_{HPC} A$ ($\Gamma \subseteq T$ סופית). מראים $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$ באינדוקציה על הוכחה ב-$HPC$, תוך שימוש בכללים של $NDC$:

- $A \in \Gamma$: $\Gamma \Rightarrow A$ אקסיומה של $NDC$.
- $A$ אקסיומה של $HPC$: מראים לכל אקסיומה של $HPC$ הוכחה ב-$NDC$ ($\vdash_{NDC} \Rightarrow A$).
- נניח ש-$A$ מוסק ע״י $MP$ מ-$B, B \rightarrow A$ ב-$HPC$, כלומר $\Gamma \vdash_{HPC} B$ ו-$\Gamma \vdash_{HPC} B \rightarrow A$, ועליהן מוחלת הנחת האינדוקציה. מ-$(\rightarrow E)$: $\vdash_{NDC} \Gamma \Rightarrow A$.

באותו אופן לכיוון השני: מניחים $T \vdash_{NDC} A$, ולכן $\Gamma \vdash_{NDC} A$ ($\Gamma \subseteq T$ סופית), ומראים הוכחה ב-$HPC$ באינדוקציה על מבנה הוכחה ב-$NDC$ ($A$ אקסיומה של $NDC$ המקרה המהיר, ועבור כל כלל ב-$NDC$ מהצורה $\frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow B}$ להראות $\Gamma \vdash_{HPC} A$ גורר $\Gamma \vdash_{HPC} B$).

<u>שקילויות לוגיות</u>:

$A$ ו-$B$ יהיו שקולות לוגית, יסומן $A \equiv B$, אם לכל השמה $v$ מתקיים $v(A) = v(B)$. שקילויות חשובות: מצורף בסוף.

**למה**: $A \equiv B$ אמ"מ $\vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$.

**משפט הצבת אקוויוולנטים**:

אם $A \equiv B$ אז לכל נוסחה $\varphi$ ופסוק אטומי $p$ מתקיים: $\varphi\{A/p\} \equiv \varphi\{B/p\}$. ולכן:

אם $T \vdash_{CPL} A \leftrightarrow B$ אז $T \vdash_{CPL} \varphi\{A/p\} \leftrightarrow \varphi\{B/p\}$ (חיזוק: $A \leftrightarrow B \vdash_{CPL} \varphi\{A/p\} \leftrightarrow \varphi\{B/p\}$).

<u>צורת *Negation Normal Form – NNF*</u>: פסוק $\varphi$ נמצא ב-$NNF$ אם כל הופעה (אם בכלל) של קשר שלילה ב-$\varphi$ היא רק לפני פסוקים אטומיים.

<u>צורת *Disjunctive Normal Form – DNF*</u>: צורה דיסיונקטיבית נורמלית – $(\vee \dots \vee)\wedge(\vee \dots \vee)\dots$

<u>צורת *Connuctive Normal Form – CNF*</u>: צורה קוניוקטיבית נורמלית – $(\wedge \dots \wedge)\vee(\wedge \dots \wedge)\dots$

<u>ליטרל</u>: פסוק אטומי או שלילתו ($p, \neg q$ ...).

מתקיים: $DNF, CNF \subseteq NNF$.

דרך נוחה להגיע לצורת $CNF$ של נוסחה $\varphi$: להגיע לנוסחת $DNF$ של $\neg\varphi$ (קל יותר), ואז להכניס את ה-$\neg$ פנימה ולהפוך את הנוסחה לצורת $CNF$.

דרך נוספת אפשרית היא לכתוב את טבלת האמת של $\varphi$ עם כל הפסוקים האטומיים, ולמצוא כמו במבנה מחשבים $POS$ ($DNF$) או $SOP$ ($CNF$).

<u>הגדרת $g_\varphi^{\vec{p}}: \{t,f\}^n \to \{t,f\}$</u>:

עבור $\varphi$ נוסחה, $p_1, \dots, p_n$ נוסחאות אטומיות (משתנים עבור נוסחאות אטומיות) הכוללות את כל הנוסחאות האטומיות המופיעות ב-$\varphi$, הפונקציה $g_\varphi^{\vec{p}}: \{t,f\}^n \to \{t,f\}$ מוגדרת: $g_\varphi^{\vec{p}}(x_1, \dots, x_n) = v(\varphi)$, כאשר $x_1 = v(p_1), \dots, x_n = v(p_n)$. בעצם פונקציה זו מחזירה את השמת $x_1, \dots, x_n$ (המקבלים ערך $t$ או $f$) כערכים ל-$v(p_1), \dots, v(p_n)$ בהתאמה, כאשר $\vec{p} =< p_1, \dots, p_n >$. הוקטור מכתיב את סדר ההופעה בטבלת האמת, ולפיכך את פרמוטצית תוצאות הפונקציה.

**טענה**:

לכל $f: \{t,f\}^n \to \{t,f\}$ קיימת נוסחה $\varphi$ ופסוקים אטומיים $p_1, \dots, p_n$ כך ש-$f = g_\varphi^{\vec{p}}$.

**<u>לוגיקה רב ערכית</u>**:

השמות מחזירות יותר משני ערכים אופציונלים. למשל, בלוגיקה התלת ערכית של קליני, ישנם הערכים $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, כאשר לקשרים מוגדרות פונ' אמת חדשות בהתאם לערכים אלו. לפי הלוגיקה הרב ערכית של קליני, נגדיר: $T \vdash_{KL}^{\{1\}} \varphi$ אם כל השמה חוקית הנותנת ל-$T$ (כל פסוק בה) ערך מהקבוצה $\{1\}$, עושה זאת גם ל-$A$. באותה מידה ניתן להגדיר $\vdash_{KL}^{\{\frac{1}{2},1\}}$.

<u>לוגיקה רב ערכית $M$</u>:

השלישיה $< V, D, O >$ כאשר:

- $V$ קבוצת ערכי אמת כך ש-$\{0,1\} \subseteq V$, $|V| \geq 2$.
- $D$ קבוצה <u>חלקית ממש</u> ולא ריקה של ערכי אמת "מצויינים" כך ש-$1 \in D, 0 \notin D$.
- $O$ קבוצה של טבלאות אמת לכל אחד מהקשרים בשפה.

<u>מודל</u>: השמה $v$ מהווה מודל לפסוק $A$ אם $v(A) \in D$.

<u>נביעה</u>: $T \vdash_M \varphi$ אם כל $M$-מודל של $T$ הוא $M$-מודל של $\varphi$.

<u>הלוגיקה התלת ערכית של גדל (*Gödel*)</u>:

| $a$ | $\neg a$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| $\frac{1}{2}$ | 0 |
| 0 | 0 |

- $a \to b = \begin{cases} 1, a \leq b \\ b, a > b \end{cases}$
- $a \vee b = max\{a, b\}$
- $a \wedge b = min\{a, b\}$

הלוגיקה הרב-ערכית של גדל מוגדרת באותו אופן כמו התלת ערכית. זו לוגיקה מסוג *Fuzzy Logic*, בניגוד לקלאסית. כל משפט של $HPI$, בפרט כל האקסיומות של $HPI$ הן טאוטולוגיות בלוגיקה התלת-ערכית של גדל. אקסיומה ($N2$) מ-$HPC$ <u>אינה</u> טאוטולוגיה בלוגיקה זו.

## **חלק שני: תחשיב הפרדיקטים / לוגיקה קלאסית מסדר ראשון - *FOL*:**

<u>שינויים עיקריים מתחשיב הפסוקים הקלאסי</u>:

- פירוט נוסף לגבי מבנה נוסחאות אטומיות.
- שימוש בכמתים: $\forall, \exists$.

**<u>שפות מסדר ראשון</u>**:

<u>המשותף לכל השפות מסדר ראשון</u>:

א. משתנים: $v_0, v_1, v_2, v_3, \ldots$. במטה שפה יסומנו: $x, y, z$.

ב. קשרים: $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$.

ג. כמתים: $\forall, \exists$.

ד. סוגריים ופסיק: "(", ")", ",".

<u>סיגנטורה</u>: לכל שפה מסדר ראשון $L$ יש סיגנטורה $\sigma_L$ המגדירה אותה, היכולה לכלול:

א. קבועים: $c_0, c_1, c_2, \ldots$.

ב. סימני פונקציה עם *arity* כלשהו (חד-מקומי, דו-מקומי...). סימון: $f_k^n$ - $k$ אינדקס הפונקציה, $n$ ה-*arity*.

ג. סימני יחס עם *arity* כלשהו. <u>לפחות סימן יחס אחד!</u>. סימון: $P_k^n$.

אם $\sigma_L$ סיגנטורה, אז $L$ היא השפה המושרית על ידה.

בשפות מסדר ראשון יש שתי קטגוריות לשוניות עיקריות:

א. שמות עצם: $\iota$ (איוטה).

ב. נוסחאות (<u>לא פסוקים!</u>): $o$ (אומיקרון).

<u>קבוצת שמות העצם של $L$ בהינתן $\sigma_L$</u>:

א. כל קבוע ב-$\sigma$ הוא ש"ע ב-$L(\sigma)$.

ב. כל משתנה הוא ש"ע ב-$L(\sigma)$.

ג. אם $f: \iota^n \rightarrow \iota$ <u>סימן</u> פונקציה $n$-מקומית של $\sigma$, $t_1, \ldots, t_n$ ש"ע, אז $f(t_1, \ldots, t_n)$ גם ש"ע ב-$L(\sigma)$.

<u>קבוצת הנוסחאות של $L(\sigma)$ בהינתן $\sigma$</u>:

א. <u>נוסחאות אטומיות</u>: אם $P: \iota^n \rightarrow o$ סימן יחס ב-$\sigma$, $t_1, \ldots, t_n$ ש"ע ב-$L(\sigma)$, אז $P(t_1, \ldots, t_n)$ נוסחה של $L(\sigma)$.

ב. אם $\varphi, \psi$ נוסחאות אז גם $\neg\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi\wedge\psi, \varphi\vee\psi$ נוסחאות ב-$L(\sigma)$.

ג. אם $\varphi$ נוסחה ו-$x$ משתנה אז $\forall x\varphi$ ו-$\exists x\varphi$ נוסחאות ב-$L(\sigma)$.

<u>קבוצת המשתנים החופשיים</u>:

$Fv[E]$ היא קבוצת המשתנים החופשיים ב-$E$:

- לקבוע $c$ (סימון לקבוע במטה-שפה): $Fv[c] = \emptyset$.
- למשתנה $x$: $Fv[x] = \{x\}$.
- לסימן פונקציה $f$, $t_1, \ldots, t_n$ ש"ע: $Fv[f(t_1, \ldots, t_n)] = \bigcup_{i=1}^n Fv[t_i]$.
- לסימן יחס $P$ וש"ע כמוגדר לעיל: $Fv[P(t_1, \ldots, t_n)] = \bigcup_{i=1}^n Fv[t_i]$.
- $Fv[\neg\varphi] = Fv[\varphi], Fv[\varphi * \psi] = Fv[\varphi] \cup Fv[\psi], * \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$.
- $Fv[\forall x\varphi] = Fv[\exists x\varphi] = Fv[\varphi] \setminus \{x\}$ (כי $x$ <u>אינו</u> חופשי בנוסחאות אלו).

<u>מבנה $M$ עבור $\sigma$ ($L(\sigma)$)</u>:

מבנה $M =< D, I >$ מוגדר:

א. $D$: תחום המבנה, קבוצה לא ריקה.

ב. $I$ פונקציית פירוש שתחומה $\sigma$, ומקיימת:

- $I[c] \in D$ לכל קבוע $c$ של $\sigma$.
- $I[f] \in D^n \rightarrow D$ לכל סימן פונקציה $f$ $n$-מקומי של $\sigma$. סימון: $f^I$.
- $I[P] \subseteq D^n$ לכל סימן יחס $P$ $n$-מקומי של $\sigma$. סימון: $P^I$.

הסימונים $I[\dots]$ הם סימונים במטה-שפה (כמו גם $f^I, P^I$).

השמה $v$:

יהי $M =< D, I >$ מבנה כלשהו לשפה $L$ מסדר ראשון. השמה ב-$L$ היא פונ' $v: \{v_0, v_1, \dots\} \to D$ (מקבוצת המשתנים אל התחום של $M$).

יחס הנכונות $\vDash^t$:

יחס בין נוסחאות בשפה $L$ וזוגות סדורים $< M, v >$ של מבנה לשפה $L$ והשמה במבנה זה, מוגדר באופן הבא:

א. $M, v \vDash P(t_1, \dots, t_n)$ אמ"מ $< v[t_1], \dots, v[t_n] > \in I[P]$, כאשר $v[t]$ מוגדר באופן הבא:

- אם $t$ קבוע אז $v[t] = I[t]$.
- אם $t$ משתנה אז $v[t]$ כבר מוגדר.
- אם $t = f(s_1, \dots, s_k)$ כאשר $f$ סימן פונקציה $k$-מקומי ו-$s_1, \dots, s_k$ ש"ע, אז $v[t] = I[f]\big[v[s_1], \dots, v[s_k]\big]$

ב. הגדרת עזר: $v'$ היא $x$-וריאנט של $v$ אם $v'[y] = v[y]$ לכל $y \neq x$ (אולי גם ל-$y = x$). מתקיים:

- $M, v \vDash \neg\varphi$ אמ"מ $M, v \nvDash \varphi$.
- $M, v \vDash \varphi \wedge \psi$ אמ"מ $M, v \vDash \varphi$ וגם $M, v \vDash \psi$.
- $M, v \vDash \varphi \vee \psi$ אמ"מ $M, v \vDash \varphi$ או $M, v \vDash \psi$.
- $M, v \vDash \varphi \to \psi$ אמ"מ $M, v \vDash \neg\varphi$ או $M, v \vDash \psi$.
- $M, v \vDash \forall x\varphi$ אמ"מ לכל $v'$ שהיא $x$-וריאנט של $v$ מתקיים $M, v \vDash \varphi$.
- $M, v \vDash \exists x\varphi$ אמ"מ קיימת $v'$ שהיא $x$-וריאנט של $v$ כך ש-$M, v \vDash \varphi$.

מופע חופשי/קשור של משתנה בנוסחה:

כל משתנה בנוסחה יכול להיות בעל מופעים קשורים ו בעל מופעים חופשיים.

1. שמות עצם: כל הופעה של משתנה בש"ע הוא חופשי במסגרת אותו ש"ע. אם $Fv[t] = \emptyset$ אז $t$ הוא ש"ע סגור.
2. נוסחאות:
   - כל משתנה המופיע בנוסחה אטומית הוא חופשי בכל מופע שלו בנוסחה.
   - כל מופע חופשי/קשור של משתנה ב-$\varphi$ או ב-$\psi$ הוא גם מופע חופשי/קשור של אותו משתנה ב-$\varphi * \psi$, $\neg\varphi$ ולהיפך.
   - מופע חופשי של משתנה $x$ בנוסחה $\forall/\exists y\varphi$ הוא מופע חופשי שלו ב-$\varphi$ אלא אם $y = x$, ואז הוא מופע קשור.

פסוק:

נוסחה ללא משתנים חופשיים, כלומר $\varphi$ פסוק אם $Fv[\varphi] = \emptyset$.

**למה**:

אם $v_1[x] = v_2[x]$ לכל $x \in Fv[\varphi]$, אז $M, v_1 \vDash \varphi$ אמ"מ $M, v_2 \vDash \varphi$.

**למת עזר**: אם $v_1[x] = v_2[x]$ לכל $x \in Fv[t]$ כאשר $t$ ש"ע, אז $v_1[t] = v_2[t]$.

תקפות:

נוסחה $\varphi$ נקראת תקפה במבנה $M$, יסומן $M \vDash^v \varphi$ או פשוט $M \vDash \varphi$, אם לכל השמה $v$ במבנה $M$ מתקיים: $M, v \vDash \varphi$.

תקפות לוגית:

נוסחה $\varphi$ תקפה לוגית אם לכל מבנה $M$ ולכל השמה $v$ באותו מבנה מתקיים $M, v \vDash \varphi$.

מודל:

1. $< M, v >$ הוא $t$-מודל של $\varphi$ אם $M, v \vDash^t \varphi$, כלומר $\varphi$ נכונה ב-$< M, v >$.
2. $M$ הוא $v$-מודל של $\varphi$ אם $M \vDash^v \varphi$, כלומר $\varphi$ תקפה ב-$M$.

**הערה חשובה**:

אמנם עבור $< M, v >$ מתקיים $M, v \vDash \neg\varphi$ אמ"מ $M, v \nvDash \varphi$, וגם $M, v \vDash \varphi \vee \psi$ אמ"מ $M, v \vDash \varphi$ וגם $M, v \vDash \psi$, אך אין זה נכון עבור $v$-מודל.

למשל עבור $\varphi := (x = y)$. מתקיים $\mathbb{N} \nvDash (x = y)$ (קיימת השמה הנותנת ל- $x, y$ ערכים שונים) וגם $\mathbb{N} \nvDash \neg(x = y)$. או למשל: מתקיים $\mathbb{N} \vDash \neg(x = y) \vee (x = y)$, אך לא מתקיים ש-$\mathbb{N} \vDash \neg(x = y)$ או $\mathbb{N} \vDash (x = y)$. זאת כיוון שנדרשים לסיפוק עם כל השמה $v$ ב-$M$.

מתי זה נכון: כאשר $\varphi$ פסוק (ואז $\vDash^t \Leftrightarrow \vDash^v$).

יחס ה-$t$-נביעה - $\vdash^t_{FOL}$:

נוסחה $\varphi$ $t$-נובעת מתורה $T$ בלוגיקה מסדר ראשון, נסמן $T \vdash^t_{FOL} \varphi$, אם כל $t$-מודל של $T$ הוא גם $t$-מודל של $\varphi$. כלומר אם $M, v \vDash T$ אז $M, v \vDash \varphi$.

<u>יחס ה-v-נביעה - $\vdash^v_{FOL}$</u>:

נוסחה $\varphi$ v-נובעת מתורה $T$ בלוגיקה מסדר ראשון, נסמן $T \vdash^v_{FOL} \varphi$, אם כל v-מודל של $T$ הוא גם v-מודל של $\varphi$. כלומר אם $M \vDash T$ אז $M \vDash \varphi$.

<u>עובדות חשובות</u>:

1. אם $T \vdash^t_{FOL} \varphi$ אז $T \vdash^v_{FOL} \varphi$. <u>ההיפך אינו נכון</u>!
2. מתי זה כן נכון הפוך: כאשר <u>$T$</u> מורכבת מפסוקים <u>בלבד</u>.
3. כלל ההכללה נכון עבור v-נביעה, כלומר: $\varphi \vdash^v_{FOL} \forall x\varphi$, אך לא עבור t-נביעה. הכיוון השני כן מתקיים גם ל-t-נביעה: $\forall x\varphi \vdash^{v,t}_{FOL} \varphi$. לכן מבחינת v-נביעה אין הבדל בין $\varphi$ ו-$\forall x\varphi$.

<u>סגור של נוסחה</u>:

סגור של נוסחה $\varphi$, מסומן $\forall\varphi$, הוא פסוק (לא יחיד) מהצורה $\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$ כאשר $Fv[\varphi] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. ישנה שקילות בין כל הסגורים של כל נוסחה $\varphi$ הן מבחינת t-נביעה והן מבחינת v-נביעה (לפי העובדה האחרונה). כמו כן עבור v-נביעה: $\varphi \vdash^v_{FOL} \forall\varphi$ וגם $\forall\varphi \vdash^v_{FOL} \varphi$.

אם $T$ תורה, נסמן $\forall T$ את תורת הסגורים של כל נוסחה ב-$T$.

**מסקנה**:

אם $T$ תורה ו-$\varphi$ נוסחה אז $T \vdash^v_{FOL} \varphi$ אמ״מ $\forall T \vdash^v_{FOL} \varphi$ אמ״מ $\forall T \vdash^t_{FOL} \varphi$ (כיוון של-$T$ ול-$\forall T$ אותם v-מודלים) (כיוון ש-$\forall T$ תורה של פסוקים).

ניתן להפוך נוסחה לפסוק ע״י הצבת קבועים חדשים $\{d_i\}$ במקום המשתנים המופיעים ב-$T, \varphi$ ולקבל: אם $T\{d_i/x_i\} \vdash^t_{FOL} \varphi\{d_i/x_i\}$ אז $T \vdash^t_{FOL} \varphi$.

**משפט הדדוקציה עבור *FOL***:

- עבור t-נביעה: $T \cup \{A\} \vdash^t_{FOL} B$ אמ״מ $T \vdash^t_{FOL} A \to B$.
- עבור v-נביעה <u>לא מתקיים משפט הדדוקציה</u>, אלא אם <u>$A$</u> פסוק. למשל: $p(x) \vdash^v_{FOL} \forall x p(x)$, אבל $\nvdash^v_{FOL} p(x) \to \forall x p(x)$.

<u>סימון: $\varphi\{t/x\}$</u>:

סימון זה מייצג את הנוסחה המתקבלת מהחלפת המופעים החופשיים של $x$ ב-$\varphi$ בש״ע $t$.

<u>ש״ע $t$ חופשי להצבה</u>: במקום $x$ ב-$\varphi$ אם שום משתנה חופשי של $t$ אינו הופך להיות קשור בעקבות ההצבה.

אם $v$ השמה אז $w = v[x := v[t]]$ היא השמה חדשה שבה: $w[y] = \begin{cases} v[y], & y \neq x \\ v[t], & y = x \end{cases}$.

**משפט ההחלפה**:

1. <u>עבור ש״ע</u>: יהיו $s_1, s_2, t$ ש״ע ו-$x$ משתנה. אם $v[s_1] = v[s_2]$ אז $v[t\{s_1/x\}] = v[t\{s_2/x\}]$. הוכחה באינדוקציה על מבנה <u>ש״ע</u> $t$.
2. <u>עבור נוסחאות</u>: יהיו $s_1, s_2$ ש״ע, $A$ נוסחה ו-$x$ משתנה. לכל השמה המקיימת $v[s_1] = v[s_2]$ מתקיים: $M, v \vDash A\{s_1/x\} \Leftrightarrow M, v \vDash A\{s_2/x\}$. הוכחה באינדוקציה על מבנה <u>נוסחה</u> $A$.

**משפט ההצבה**:

1. <u>עבור ש״ע</u>: אם $w = v[x := [t]]$ ו-$s$ ש״ע, אז $w[s] = v[s\{t/x\}]$.
2. <u>עבור נוסחאות</u>: אם $w = v[x := v[t]]$ ו-$\varphi$ נוסחה, אז $M, w \vDash \varphi$ אמ״מ $M, v \vDash \varphi\{t/x\}$, ובלבד ש-$t$ חופשי להצבה במקום $x$ ב-$\varphi$.

**מסקנה**:

$\varphi \vdash^v_{FOL} \varphi\{t/x\}$ ובלבד ש-$t$ חופשי להצבה במקום $x$ ב-$\varphi$.

**סיכום תכונות נביעה – *t* מול *v***:

| תכונה | ***t*** | ***v*** |
|---|---|---|
| $\vDash \neg\varphi \Leftrightarrow \nvDash \varphi$<br>$\vDash \varphi \lor \psi \Leftrightarrow \vDash \varphi \ or \vDash \psi$ | **מתקיים** | **לא מתקיים**. דוגמא: $\mathbb{N} \nvDash (x = 1), \mathbb{N} \nvDash (x \neq 1)$ |
| סגור של נוסחה - $\forall\varphi$:<br>1. $\forall\varphi \vdash \varphi$<br>2. $\varphi \vdash \forall\varphi$ | 1. מתקיים.<br>2. **לא מתקיים**. למשל: $(x = 1) \nvdash^t_{FOL} \forall x(x = 1)$ | 1. מתקיים<br>2. מתקיים |
| גרירת נביעה אחת מהשניה | מתקיים: $T \vdash^t_{FOL} \varphi \Rightarrow T \vdash^v_{FOL} \varphi$ | **לא מתקיים**: $T \vdash^v_{FOL} \varphi \Rightarrow T \vdash^t_{FOL} \varphi$, למעט כאשר <u>$T$</u> מורכבת מ<u>פסוקים</u> בלבד. |
| כלל ההכללה: $\forall x\varphi \vdash \varphi$<br>כיוון שני: $\varphi \vdash \forall x\varphi$ | מתקיים<br>**לא מתקיים**: אותו דוגמא של הסגור | מתקיים<br>מתקיים |
| משפט הדדוקציה:<br>T | מתקיים | **לא מתקיים**: למעט כאשר <u>$A$</u> פסוק. |
| כלל ההצבה: $\varphi \vdash \varphi\{t/x\}$ | **לא מתקיים**. למשל: $(x \neq t) \nvdash^t_{FOL} (t \neq t)$ | מתקיים |
| גרירת ספיקות מאחד לשני | **לא מתקיים**: למעט כאשר <u>$T$</u> מורכבת מפסוקים | מתקיים: אם $T$ v-ספיקה אז $T$ t-ספיקה |

**טענה**:

תהי $\varphi$ טאוטולוגיה. תורה $T$ ספיקה אמ"מ $T \nVdash \neg\varphi$ (נכון גם לגבי $v$ וגם לגבי $t$).

**<u>מערכת נוסח הילברט עבור *FOL – HFOL*</u>**:

<u>אקסיומות</u>:

1. כל האיסטנציות של אקסיומות $HPC$.
2. $\forall xA \rightarrow A\{t/x\}$, $A\{t/x\} \rightarrow \exists xA$ בתנאי ש-$t$ חופשי להצבה במקום $x$ ב-$A$.
3. $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$, $\forall x(B \rightarrow A) \rightarrow (\exists xB \rightarrow A)$, בתנאי ש-$x$ אינו חופשי ב-$A$.

<u>כללים</u>:

1. $(MP)\,\frac{A \quad A\rightarrow B}{B}$
2. $(GEN)\,\frac{A}{\forall xA}$

**<u>מערכת דדוקציה טבעית עבור *FOL – NDFOL*</u>**:

בנוסף על כללי $NDC$:

| | |
|---|---|
| $(\forall I)^{**}\,\frac{(\Gamma \Rightarrow A\{y/x\})}{\Gamma \Rightarrow \forall xA}$ | $(\forall E)^{*}\,\frac{(\Gamma \Rightarrow \forall xA)}{\Gamma \Rightarrow A\{t/x\}}$ |
| $(\exists I)^{*}\,\frac{\Gamma \Rightarrow A\{t/x\}}{\Gamma \Rightarrow \exists xA}$ | $(\exists E)^{**}\,\frac{\Gamma \Rightarrow \exists xA \quad \Gamma, A\{y/x\} \Rightarrow C}{\Gamma \Rightarrow C}$ |

* בתנאי ש-$t$ חופשי להצבה במקום $x$ ב-$A$.

** בתנאי ש-$y$ חופשי להצבה במקום $x$ ב-$A$ ואינו חופשי להצבה בשום נוסחה ב-$\Gamma \cup \{\exists xA, C\}$.

**<u>משפטי הנאותות והשלמות של *HFOL, NDFOL*</u>**:

- $T \vdash_{NDFOL} \varphi \Leftrightarrow T \vdash^{t}_{FOL} \varphi$
- $T \vdash_{HFOL} \varphi \Leftrightarrow T \vdash^{v}_{FOL} \varphi$

**משפט הדדוקציה של *HFOL***:

אם $A$ פסוק אז: $T \vdash_{HFOL} A \rightarrow B \Leftrightarrow T\cup\{A\} \vdash_{HFOL} B$.

**טענה**:

- $T \vdash_{NDFOL} \varphi \Rightarrow T \vdash_{HFOL} \varphi$
- אם $T$ מורכבת מפסוקים בלבד אז גם $T \vdash_{HFOL} \varphi \Rightarrow T \vdash_{NDFOL} \varphi$.

**מרחבי הרברנד**:

<u>מרחב הרברנד: $H(L)$</u>:

מרחב הרברנד של שפה $L$ (עם קבוע) הוא קבוצת שמות העצם הסגורים (שאין בהם משתנים) של $L$. למשל בתורת המספרים: ... $0, S(0), S(S(0))$.

אם נסתכל למשל על סימן הפונקציה $+$, מתקיים $+(S0, SS0) \in H(L_{PA})$, ומתקיים $+(S0, SS0) \neq SSS0$ - כל אחד מאלו ש"ס בפני עצמו.

<u>מבנה הרברנד עבור השפה $L$</u>:

מבנה מהצורה $< D, I >$ בו:

א. $D = H(L)$.

ב. מתקיים:

- אם $c$ קבוע בשפה אז $I[c] = c$.
- אם $f$ סימן פונקציה $n$-מקומי של השפה אז $I[f] = \lambda x_1 \in D, \dots, x_n \in D. f(x_1, \dots, x_n)$. אם $t_1, \dots, t_n$ ש"ס השייכים ל- $H(L)$, אז $I[f][t_1, \dots, t_n] = f(t_1, \dots, t_n) \in H(L)$.

<u>*DCA*</u>: הנחת התחום הסגור – רק מה שיש לו שם בשפה קיים.

<u>*UNA*</u>: הנחת השם היחיד – לכל איבר שם אחד בלבד, אין שני איברים בעלי אותו שם.

ההבדל בין שני **מרחבי** (אולי הכוונה למבנים) הרברנד שונים לאותה שפה הוא הפירוש שהם נותנים לסימני היחס.

<u>בסיס הרברנד $HB(M)$</u>:

בסיס הרברנד של מבנה הרברנד $M$ עבור השפה $L$ הוא קבוצת כל הפסוקים האטומיים הנכונים / תקפים (לא משנה עבור פסוקים) ב-$M$. יסומן ב-$HB(M)$. פסוקים אטומיים יהיו מהצורה $P(s_1, \dots, s_n)$ כאשר $P$ סימן יחס $n$-מקומי ו-$s_1, \dots, s_n$ הם <u>ש"ס</u>.

**טענות**:

1. מהגדרה זו נובע שאם $t$ ש"ס אז $I[t] = t$.
2. אם $M =< H(L), I >$ מבנה הרברנד עבור $L$, $P$ סימן יחס $n$-מקומי של $L$: $I[P] = \{< s_1, \dots, s_n >\in H(L)^n |\ p(s_1, \dots, s_n) \in HB(M)\}$.
3. נניח $M$ מבנה הרברנד עבור השפה $L$, נתייחס לפסוקים האטומים של $L$ כאילו הם של שפת תחשיב הפסוקים. נגדיר השמה במובן של תחשיב הפסוקים $v_M$ באופן הבא: $v_M[p(s_1, \dots, s_n)] = \begin{cases} t, & M \vDash p(s_1, \dots, s_n) \\ f, & o/w \end{cases}$. נניח ש-$\varphi$ צירוף בוליאני של פסוקים אטומים של $L$ (כלומר פסוק ללא כמתים). אז: $v_M[\varphi] = t \Leftrightarrow M \vDash \varphi$.
4. נניח $v$ השמה למבנה הרברנד $M$ עבור השפה $L$, $x$ משתנה, אז: $M, v \vDash \varphi \Leftrightarrow M, v \vDash \varphi\{v[x]/x\}$. <u>נשים לב</u>: במבנה רגיל $v[x]$ אינו ש"ע של השפה, ולא יכול להיכתב שם, אך במבנה הרברנד זה נכון.

   **מסקנה מיידית**: נניח $Fv[\varphi] = \{x_1, \dots, x_n\}$ ו-$v[x_i] = t_i$ ($t_i$ ש"ס), אז: $M, v \vDash \varphi \Leftrightarrow M \vDash \varphi\{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$.
5. נניח $M$ מרחב הרברנד עבור השפה $L$:

   א. אם $\forall x\varphi$ פסוק אז לכל ש"ס $t$ מתקיים: $M \vDash \forall x\varphi \Leftrightarrow M \vDash \varphi\{t/x\}$.

   ב. אם $\exists x\varphi$ פסוק אז קיים $t$ ש"ס כלשהו המקיים: $M \vDash \exists x\varphi \Leftrightarrow M \vDash \varphi\{t/x\}$.

<u>הערה</u>: להוכחת משפט השלמות של $HFOL$ ($\vdash^v_{FOL} \Rightarrow \vdash_{HFOL}$) באמצעות מרחבי הרברנד יש צורך שתורה $T$ תקיים את תכונת הנקין, והנחה ש-$T \cup \varphi$ פסוקים.

<u>תכונת הנקין</u>:

לתורה $T$ יש תכונת הנקין אם כאשר יש פסוק $\exists x\varphi$ כך ש-$T \vdash_{HFOL} \exists x\varphi$, אז יש ש"ס $t$ כך ש-$T \vdash_{HFOL} \varphi\{t/x\}$.

**מסקנות ממשפט השלמות**:

**1. משפט הקומפקטיות עבור $\vdash_{FOL}$**:

<u>נוסח א'</u>: אם $T \vdash_{FOL} \varphi$ כאשר $T \cup \{\varphi\}$ פסוקים אז יש קבוצה חלקית <u>סופית</u> $\Gamma \subseteq T$ כך ש-$\Gamma \vdash_{FOL} \varphi$.

<u>נוסח ב'</u>: תורה $T$ של פסוקים היא ספיקה אמ"מ כל קבוצה חלקית סופית שלה $\Gamma \subseteq T$ היא ספיקה.

<u>יישום 1</u>:

עבור שפת תורת המספרים $L_{PA}$ מתקיים המשפט הבא:

לא קיימת תורה $T$ בשפה מסדר ראשון כמו $L_{PA}$ ש-$\mathbb{N}$ הוא המודל היחיד שלה (עד כדי איזומורפיזם; כלומר אין מערכת אקסיומות קטגורית מסדר ראשון עבור $\mathbb{N}$. כאן $\mathbb{N}$ מייצג את מודל המספרים הטבעיים).

ההוכחה מתבססת על הרעיון הבא: יוצרים מתורה $T$ תורה חדשה $T^*$ מעל שפה חדשה שההבדל היחיד מ-$L_{PA}$ הוא שיש לה קבוע חדש $c$. נגדיר את $T^* = T \cup \{c \neq 0, c \neq S0, c \neq SS0 \dots\}$. מראים ל-$T^*$ מודל ע"י משפט הקומפקטיות בכך שמראים שלכל $\Gamma \subseteq T^*$ סופית יש מודל: כזה המתנהג כמו מודל ל-$T^*$ רק שהפירוש שנותן ל-$c$ הוא $I[c] = max\{k_1, \dots, k_l\} + 1$ כאשר $k_l$ הוא המספר המקסימלי עבורו מכילה $\Gamma$ את $c \neq \underbrace{S \dots S}_{k_l\ times} 0$.

לפי משפט הקומפקטיות, שוב, נובע ש-$T^*$ ספיקה, והרי יש במודל שלה $I[c]$ שהוא עצם חדש השונה מכל $\mathbb{N}$, ולכן מודל זה לא איזומורפי ל-$\mathbb{N}$. ברור שמודל זה ל-$T^*$ הוא גם מודל ל-$T$, ולכן $\mathbb{N}$ <u>אינו</u> המודל היחיד שלה עד כדי איזומורפיזם.

**2. משפט סקולם-לוונהיים**:

אם ל-$T$ יש מודל, אז יש לה מודל בן-מניה.

**3. מסקנה שלישית**:

הבעיה האם פסוק $\varphi$ בשפה מסדר ראשון הוא אמת לוגית היא חצי כריעה.

$T \vdash_{FOL} \varphi$ אמ"מ $T \cup \{\neg\varphi\}$ אינה ספיקה, $T, \varphi$ פסוקים.

בהינתן $\Gamma$ קבוצה סופית של פסוקים, נסתכל על הבעיה האם היא ספיקה: הבסיס יהיה כאשר $\Gamma$ לא מכילה כמתים, ואז אנו ברמה של תחשיב הפסוקים וספיקות במובן $FOL$ שקולה לספיקות במובן תחשיב הפסוקים. הקשר בין ספיקות בשני המובנים:

1. אם $M$ מבנה עבור השפה נגדיר את $v_M$, השמה במובן תחשיב הפסוקים, באופן הבא: $v_M(A) = \begin{cases} t, M \vDash A \\ f, o/w \end{cases}$, כאשר $A$ פסוק אטומי. $v_M$ מוגדרת באופן טבעי לכל פסוק חסר כמתים.

   **למה**: אם $\varphi$ פסוק חסר כמתים אז $M \vDash \varphi$ אמ"מ $v_M(\varphi) = t$ ($v_M \vDash \varphi$ במובן תחשיב הפסוקים). הוכחה באינדוקציה על מבנה $\varphi$.
2. אם $v$ השמה מקבוצת הפסוקים האטומים של שפה מסדר ראשון $L$ אל $\{t, f\}$ אז היא מגדירה מבנה הרברנד $M$ כך ש-$M \vDash \varphi$ אמ"מ $v_M(\varphi) = t$ לכל פסוק חסר כמתים $\varphi$. $M$ הוא מבנה הרברנד לשפה שבסיס הרברנד שלו הוא קבוצת הפסוקים האטומים ש-$v$ נותנת להם $t$.

<u>פסוק אוניברסלי</u>:

פסוק מהצורה $\underbrace{\forall x_1 \dots \forall x_n}_{\text{רישא}} \underbrace{\psi}_{\text{מטריצה}}$ כאשר $\psi$ נוסחה ללא כמתים.

**משפט סקולם**:

בהינתן פסוק $\varphi$ יש אלגוריתם הבונה פסוק אוניברסלי $\varphi'$ כך ש-$\varphi$ ספיק $\Leftrightarrow$ $\varphi'$ ספיק.

<u>אינסטנציה</u>:

נניח $\psi$ נוסחה ו-$Fv[\psi] \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$. אינסטנציה סגורה של $\psi$ היא פסוק מהצורה $\psi\{t_1/x_1, \dots, t_n/x_n\}$, כלומר פסוק המתקבל מהצבת ש"ס במקום המשתנים החופשיים של $\psi$.

**משפט הרברנד**:

תורה $T$ (יכולה להיות סופית) המורכבת <u>מפסוקים אוניברסליים</u> היא ספיקה במובן $FOL$ אמ"מ קבוצת האינסטנציות הסגורות של מטריצות אברי $T$ היא ספיקה <u>במובן של תחשיב הפסוקים</u>.

<u>שלבים בבדיקה האם $\Gamma \vdash_{FOL} \varphi$</u>:

בודקים האם $\Gamma \cup \{\varphi\}$ ספיקה:

1. מעבירים כל פסוק ב-$\Gamma \cup \{\varphi\}$ לצורה פרנקסית נורמלית: $\forall/\exists x_1 \dots \forall/\exists x_n \psi$.
2. עושים סקולומיזציה על הפסוקים שהתקבלו בשלב 2, וכך הופכים כל פסוק לפסוק אוניברסלי.
3. כעת ניתן להסתכל על קבוצת האינסטנציות הסגורות של מטריצות הפסוקים האוניברסליים, ואם נמצא סתירה מיידית נוכל לקבוע ש-$\Gamma \cup \{\varphi\}$ אינה ספיקה, ולפיכך $\Gamma \vdash_{FOL} \varphi$.

<u>תהליך סקולומיזציה להפיכת פסוק לאוניברסלי</u>:

תחילה עוברים לצורת $PNF$:

- מחליפים שמות משתנים קשורים כך שיהיו ייחודיים לפסוק.
- מוציאים כמתים החוצה בעזרת שקילויות (מצורף בסוף).

לאחר מכן מבצעים את האלג' הבא (משפט סקולם):

- $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \forall \dots \varphi(x_1, \dots, x_n, y, \dots) \to \forall x_1 \dots \forall x_n \forall \dots \varphi(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)/y, \dots)$, כאשר $f$ סימן פונ' חדש.
- $\exists y \varphi(y) \to \varphi\{c/y\}$, כאשר $c$ קבוע חדש בשפה.

**משפט החלפת אקוויוולנטים**:

$A \leftrightarrow A' \vdash^{v}_{FOL} \varphi \leftrightarrow \varphi'$, כאשר $\varphi'$ מתקבלת מ-$\varphi$ ע"י החלפת מופעים של $A$ ב-$A'$. הוכחה באינדוקציה על מבנה $\varphi$.

**מסקנה**:

אם $T \vdash^{v}_{FOL} A \leftrightarrow A'$ אז $T \vdash^{v}_{FOL} \varphi \leftrightarrow \varphi'$, כאשר $\varphi'$ מוגדרת כמו קודם.

**<u>אזהרה</u>**: אין זה נכון תמיד לגבי $t$-נביעה. למשל: $(x = x) \leftrightarrow (x = c) \nvdash_{FOL} \forall x(x = x) \leftrightarrow \forall x(x = c)$ - למשל עבור מבנה עם יותר מאיבר אחד, כאשר $I[x] = c$.

<u>הערות על שקילויות</u>:

- $\exists x p(x) \land \exists x q(x)$ לא שקול ל-$\exists x p(x) \land q(x)$. אלא: $\exists x p(x) \land \exists x q(x) \equiv \exists x \exists y (p(x) \land q(y))$.
- לשים לב:
  - $A \to (\exists x B) \equiv \exists x (A \to B)$
  - $(\exists x A) \to B \equiv \forall x (A \to B)$

**משפט**:

התורה $T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \varphi\}$ ספיקה אמ"מ התורה הבאה ספיקה: $T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi\{f(x_1, \dots, x_n)/y\}\}$, כאשר $f$ סימן פונקציה חדש בשפה.

כאשר $n = 0$ אז $f(\dots)$ הוא קבוע חדש בשפה. $f$ היא <u>פונקצית סקולם</u>.

כך ניתן לעבור מתורה (סופית) $T$ לתורת פסוקים אוניברסליים $T'$. לשים לב:

- $T'$ מעל השפה $L$ בתוספת סימני הפונקציות וקבועים חדשים מתהליכי הסקולומיזציה, ומבנה לשפה זו $M' = < D, I' >$.
- $T$ מעל השפה $L$, ומבנה לשפה זה יהיה $M = < D, I >$, כאשר $I$ הוא צמצום $I'$ לסיגנטורה של $L$.

אם $\varphi$ נוסחה בשפה $L$ ו-$v$ השמה ב-$D$ אז: $M, v \vDash \varphi$ אמ"מ $M', v \vDash \varphi$.

<u>התורה $Sk(T)$</u>:

התורה $Sk(T)$ של תורה $T$ סופית היא תורת הפסוקים האוניברסליים שהתקבלו מסקולומיזציה של פסוקי $T$.

**<u>הערה חשובה</u>** : התורה $Sk(T)$ והתורה $T$ <u>אינן שקולות</u>, לרוב אינן מעל אותה שפה בכלל (בתורה $Sk(T)$ יתכנו סימנים חדשים בשפה).

**הקשר שמתקיים** : $Sk(T)$ ספיקה אמ"מ $T$ ספיקה.

כמו כן :

- $Sk(T)$ היא הרחבה משמרת של $T$, כלומר אם $\varphi$ פסוק בשפה המקורית , אז $Sk(T) \vdash \varphi \Leftrightarrow T \vdash \varphi$. <u>אבל</u>, יש נוסחאות יכיחות ב- $Sk(T)$ שאינן יכיחות ב-$T$.
- כל מודל $M$ של $T$ ניתן להרחבה ע"י מתן פירוש לסימנים החדשים בשפה של $Sk(T)$ למודל $M_{Sk}$ של $Sk(T)$.

**<u>לוגיקות מסדר ראשון עם שוויון</u>** :

שפות מסדר ראשון בהן יש יחס דו מקומי " = " שפירושו יחס הזהות. את סימן השוויון במטה שפה נחליף כעת לסימן " $\cong$ ". נסמן לוגיקה זו $FOL^=$, ומבנה עבור שפה עם שוויון הוא $M =< D, I >$ כאשר $I[=] \cong \{< x, x > | x \in D\}$. זהו <u>מבנה נורמלי</u> לשפה עם שוויון.

<u>$t$-מודל</u>: של נוסחה $\varphi$ בשפה $L$ עם שוויון הוא הזוג $< M, v >$ בו $M$ מבנה נורמלי ו-$M, v \vDash \varphi$.

<u>$v$-מודל</u>: של נוסחה $\varphi$ בשפה $L$ עם שוויון הוא מבנה נורמלי $M$ כך ש-$M \vDash \varphi$.

הגדרות ברורות ל- $\vdash^{t}_{FOL^=}$ ול- $\vdash^{v}_{FOL^=}$ .

**משפט** :

נניח $M =< D, I >$ מודל של אקסיומות השוויון $Eq(L)$ ($M$ הוא מבנה עבור השפה $L$ עם סימן ה- "="), אז קיים מבנה נורמלי $M' =< D', I' >$ ופונקציה $F: D \overset{\text{על}}{\to} D'$ כך שלכל השמה $v$ ב-$D$ ולכל נוסחה $\varphi$ של $L$ : $M, v \vDash \varphi \Leftrightarrow M', F \circ v \vDash \varphi$. בפרט, אם $\varphi$ פסוק : $M \vDash \varphi \Leftrightarrow M' \vDash \varphi$.

**מסקנה** :

1. $T \vdash^{t}_{FOL^=} \varphi$ אמ"מ $Eq(L) \cup T \vdash^{t}_{FOL} \varphi$.
2. $T \vdash^{v}_{FOL^=} \varphi$ אמ"מ $Eq(L) \cup T \vdash^{v}_{FOL} \varphi$.

**מסקנות נוספות** :

1. $\vdash_{FOL^=} \varphi$ אמ"מ $Eq(L) \vdash_{FOL} \varphi$ (כאשר $L$ השפה המינימלית של $\varphi$, שהיא סופית). כיוון שהראינו שהבעיה השמאלית חצי כריעה , אז גם הבעיה $\vdash_{FOL^=} \varphi$ חצי כריעה.
2. **משפט הקומפקטיות** : נכון ל-$FOL^=$ : $T \vdash_{FOL^=} \varphi$ אמ"מ קיימת $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma \vdash_{FOL^=} \varphi$.
   טענה שקולה לפי הרדוקציה : $T \cup Eq(L) \vdash_{FOL} \varphi$ אמ"מ קיימת $\Gamma \subseteq T$ סופית כך ש-$\Gamma \cup Eq(L) \vdash_{FOL} \varphi$, וזה לפי משפט' הקומפקטיות הרגיל.
3. **משפט סקולם-לווהנהיים** : נכון גם עבור $FOL^=$ : אם ל-$T$ מודל נורמלי, אז יש לה מודל נורמלי בן מניה.
4. **משפט הרברנד** : נניח רוצים לבדוק האם $T \vdash_{FOL^=} \varphi$ $T$ ספיקה, ונניח $T$ סופית ($T \cup \{\varphi\}$ פסוקים בלבד). זה מתקיים אמ "מ $T \cup Eq(L) \vdash_{FOL} \varphi$ כאשר $Eq(L)$ סופית (כי $T$ סופית). כעת בודקים בתהליך הרגיל של מעבר לצורת $PNF$ ולאחר מכן סקולמיזציה, כאשר $Eq(L)$ לאורך תהליך זה נשארת אותו דבר כיוון שהיא כבר בצורה אוניברסלית . אין צורך להוסיף בסוף התהליך ל- $Eq(L')$ ($L'$ השפה החדשה שהתקבלה מסקולומיזציה) התייחסות לסימנים החדשים.
5. **מערכת $HFOL^=$** : מתקבלת כאשר מוסיפים ל-$HFOL$ של שפה מסדר ראשון $L$ את קבוצת האקסיומות $Eq(L)$. <u>מתקיים משפט השלמות</u>.
6. **מערכת $NDFOL^=$** : מתקבלת כאשר מוסיפים ל-$NDFOL$ את $\Gamma \Rightarrow t = t$ בתור אקסיומה לכל ש"ע $t$, וכן את הכלל הבא :
   כלל הפרמודולציה : $\frac{\Gamma \Rightarrow t = s \quad \Gamma \Rightarrow \varphi\{t/x\}}{\Gamma \Rightarrow \varphi\{s/x\}}$, כאשר $s,t$ חופשיים להצבה במקום $x$ ב-$\varphi$.

**<u>הרחבה ע"י הגדרות בשפות מסדר ראשון</u>** :

<u>הכנסת סימני יחס</u> :

עבור $\varphi$ נוסחה בשפה $L$, $T$ תורה ב-$L$ ו-$Fv[\varphi] = \{x_1, \dots, x_n\}$ מגדירים שפה חדשה $L'$ המתקבלת מ-$L$ ע"י שמוסיפים לה סימן יחס חדש $P_\varphi$ ומ-$T$ יוצרים את $T' = T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n P_\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi\}$. מתקיים : אם $A$ נוסחה ב-$L$ אז $T \vDash A \Leftrightarrow T' \vDash A$, כלומר $T'$ הרחבה משמרת של $T$.

<u>הכנסת סימני פונקציה</u> :

נניח כמו קודם רק ש- $L$ שפה עם שוויון , ונניח $T \vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \exists! y \varphi$ (שקול ל- $\forall x_1 \dots \forall x_n \exists y \forall z(\varphi\{z/y\} \leftrightarrow (z = y))$). אפשר להוסיף סימן פונקציה חדש $f_\varphi$ ולקבל מ-$T$ תורה $T' = T \cup \{\forall x_1 \dots \forall x_n \varphi\{f(x_1, \dots, x_n)/y\}\}$. גם כאן $T'$ הרחבה משמרת של $T$.

<u>כאשר עובדים בשפה רב סוגית</u> :

למשל אלגברה לינארית בה יש סקאלרים ווקטורים , מתרגמים את כל הסימנים לשפה חד סוגית שמכילה את כל סימני השפה הדו- סוגית, ובנוסף יש בה סימני יחס חד מקומיים $s, v$.

תהי $Tr$ פוני' תרגום. התרגום :

- לכל שני משתנים שונים של השפה הדו סוגית יותאם תרגום : $Tr[x^s], Tr[x^v]$.

- לכל קבוע $c$ : $Tr[c] = c$.
- לפונקציות : $Tr[f(t_1, \dots, t_n)] = f(Tr[t_1], \dots, Tr[t_n])$
- סימני יחס :
  - $Tr[P(t_1, \dots, t_n)] = P(Tr[t_1], \dots, Tr[t_n])$.
  - $Tr[A \wedge B] = Tr[A] \wedge Tr[B]$, באופן דומה לשאר הקשרים.
  - $Tr[\forall x^s \varphi] = \forall x(s(x) \to Tr[\varphi])$.
  - $Tr[\exists y^v \varphi] = \exists y(v(y) \wedge Tr[\varphi])$

**משפט** :

$T \vdash \varphi$ בלוגיקה הרב סוגית אמ"מ $\{Signature\ Ax.\} \cup Tr[T] \vdash Tr[\varphi]$, כאשר אקס' הסיגנטורה לדוגמא : $\forall x \forall y(s(x) \wedge s(y) \to s(x +_s y))$.