מודלים חישוביים - תרגיל 5#

אריאל סטולרמן

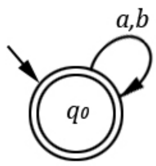
כלב אלפרנס

קבוצה 02

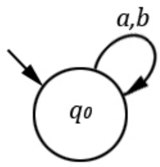
(1)

להלן DFA לשפות הבאות מעל $\Sigma = \{a, b\}$:

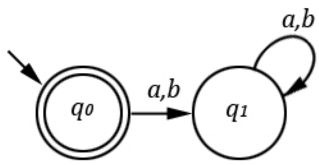
(a) Σ^* :



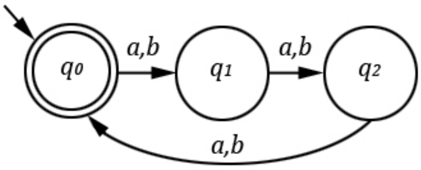
(b) $\emptyset$:



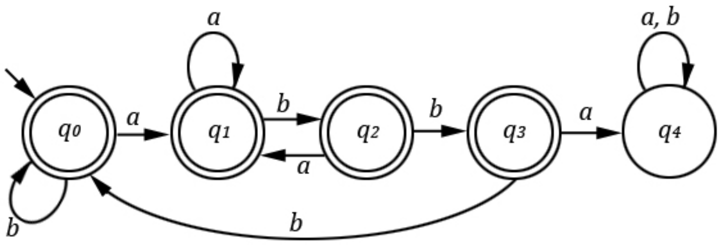
(c) $\{\varepsilon\}$:



(d) $\{w \mid |w| \bmod 3 = 0\}$:



(e) $\{w \mid w \text{ does not contain the substring 'abba'}\}$:

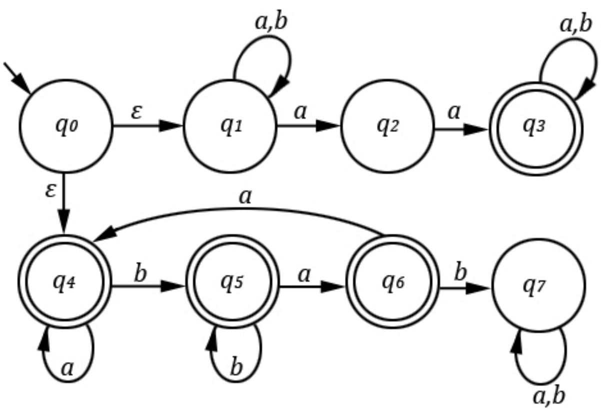


(2)

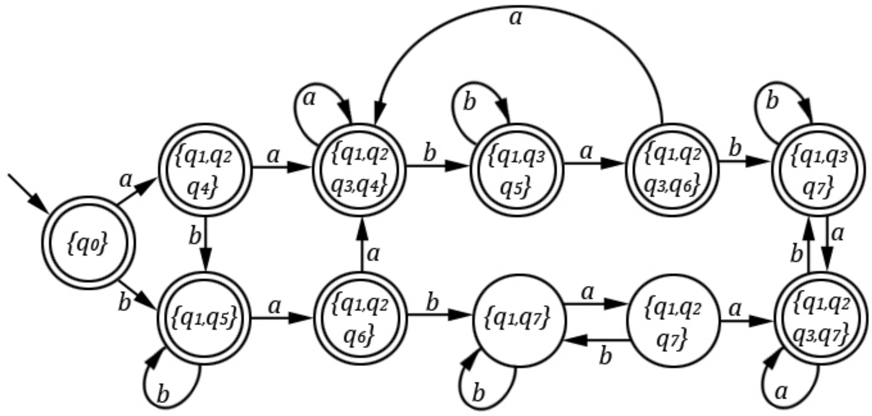
(a)

$$\{w \mid w \text{ contains the substring 'aa' or doesn't contain the substring 'bab'}\}$$

NFA :



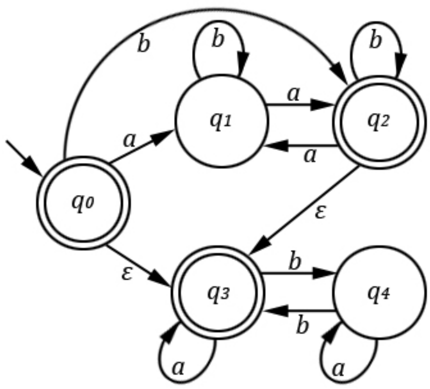
$: DFA$



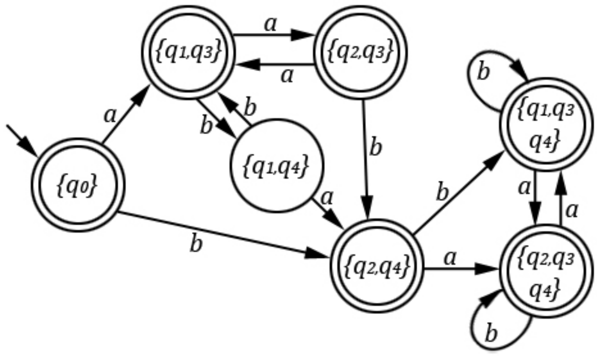
(b)

$$\{w \in \{a,b\}^* \mid there\ exists\ a\ partitioning\ of\ w\ to\ w = xy\ s.t.$$
$$x\ contains\ an\ even\ number\ of\ 'a's\ and\ y\ contains\ an\ even\ number\ of\ 'b's\}$$

$: NFA$



$: DFA$



(3)

(a) $\{w \mid |w|\ mod\ 4 = 0\} = [(0+1)\cdot(0+1)\cdot(0+1)\cdot(0+1)]^*$

(b) $\{w \mid w\ contains\ exactly\ four\ '1'\} = 0^* \cdot 1 \cdot 0^* \cdot 1 \cdot 0^* \cdot 1 \cdot 0^* \cdot 1 \cdot 0^*$

(4)

(a)

$$L' = \{xy \mid x \notin L, y \in L\}$$

נבנה אוטומט NFA לשפה L' :

יהי A אוטומט מקבל לשפה L. נסמן ב-A_1 עותק של האוטומט A כאשר כל מצב מקבל ב-A אינו מקבל ב-A_1 (כלומר אין בו מצבים מקבלים ; בהגדרת האוטומט ל-L' בהמשך, נתייחס לקבוצה $F \times \{1\}$ כקבוצת המצבים **שהיו** סופיים ב-A_1), ועותק נוסף A_2 זהה לחלוטין ל-A. לשם נוחות הסימון, לכל מצב q_i נסמן $(q_i, 1)$ להופעתו בעותק A_1, ו-$(q_i, 2)$ להופעתו בעותק A_2.

נבנה NFA המקבל את L' שנסמנו N באופן הבא :

$N = (Q \times \{1,2\}, \Sigma, \delta', (q_0, 1), F \times \{2\})$ *where:*

$$\begin{aligned}
\delta' : \ \forall\, a \in \Sigma: \quad & \delta'\big((q,1),a\big) = \{(\delta(q,a),1),(\delta(q_0,a),2)\}, && \forall q \in (Q \times \{1\}) \backslash (F \times \{1\}) \\
& \delta'\big((q,1),a\big) = \{(\delta(q,a),1)\}, && \forall q \in F \times \{1\} \\
& \delta'\big((q,2),a\big) = \{(\delta(q,a),2)\}, && \forall q \in Q \times \{2\}
\end{aligned}$$

כלומר :

- כל מצב שאינו מקבל (במקור) ב-A_1 יכול או להמשיך לפי הזרימה המקורית של A בתוך A_1 או לעבור למצב המתאים ב-A_2.
- כל מצב מקבל (במקור ; ב-N אינו מקבל) ב-A_1 ממשיך לפי הזרימה המקורית של A בתוך A_1.
- כל מצב ב-A_2 ממשיך לפי הזרימה המקורית בתוך A_2 עד קבלה / אי קבלה.
- מצב ההתחלה של N הוא מצב ההתחלה של A_1, מצבי הסיום של N הם מצבי הסיום של A_2.

נכונות:

תהי $w \in L'$, אזי קיימת לה חלוקה $w = xy$ כך ש-$x \notin L, y \in L$. אזי קיימים ב-A שני רצפי מצבים :

- $q_0 \to \cdots \to q_m,\ \ q_m \notin F, runs\ on\ the\ word\ x$
- $q_0 \to \cdots \to q_F,\ \ q_F \in F, runs\ on\ the\ word\ y$

אזי ב-N קיים רצף מצבים : $(q_0, 1) \to \cdots \to (q_m, 1) \to (q_0, 2) \to \cdots \to (q_F, 2)$ הרץ על המילה $w = xy$ ומקבל אותה (המעבר מ-$(q_m, 1)$ אל $(q_0, 2)$ יכול להתבצע ע"פ הגדרת N). אזי $w \in L(N)$.

תהי $w \in L(N)$, אזי קיים רצף מצבים מקבל : $(q_0, 1) \to \cdots \to (q_m, 1) \to (q_0, 2) \to \cdots \to (q_F, 2)$ בריצה על w. אזי ניתן לחלק את w לשני חלקים – נגדיר כ-x את $m+1$ התוים הראשונים של w, וכ-y את שאר התוים של w. אזי קיימים רצפים ב-A :

- $q_0 \to \cdots \to q_m,\ \ q_m \notin F, runs\ on\ the\ word\ x$
- $q_0 \to \cdots \to q_F,\ \ q_F \in F, runs\ on\ the\ word\ y$

כאשר הרצף הראשון לא מקבל את x והשני כן מקבל את y, וזאת לפי חלוקת w ותכונותיה כמילה ב-$L(N)$. אזי קיימת ל-w חלוקה ל-$w = xy$ כך ש-$x \notin L, y \in L$. אזי $w \in L'$.

$\Leftarrow$ $L' = L(N)$, ולכן L' רגולרית.

(b)

$$L' = \{x_2x_4 \dots x_{2n} \mid x_2, x_4, \dots, x_{2n} \in \Sigma, \exists x_1, x_3, \dots, x_{2n-1} \in \Sigma\ s.t.\, x_1x_2 \dots x_{2n} \in L\}$$

יהי A אוטומט מקבל לשפה L. נסמן ב-A_1 עותק של האוטומט A כאשר כל מצב מקבל ב-A אינו מקבל ב-A_1 (כלומר אין בו מצבים מקבלים), ועותק נוסף A_2 זהה לחלוטין ל-A. גם כאן נשתמש בסימונים $(q_i, 1)$ להופעת q_i בעותק A_1, ו-$(q_i, 2)$ להופעתו בעותק A_2.

נבנה NFA המקבל את L' שנסמנו N באופן הבא:

$N = (Q \times \{1,2\}, \Sigma, \delta', (q_0, 1), F \times \{2\})$ *where:*

δ': $\quad \forall (q,1) \in Q \times \{1\}$: $\quad \delta'\big((q,1), \varepsilon\big) = \{(\delta(q,a), 2) \mid a \in \Sigma\}$

$\quad \forall (q,2) \in Q \times \{2\}, \forall a \in \Sigma$: $\quad \delta'\big((q,2), a\big) = \{(\delta(q,a), 1)\}$

נכונות:

תהי $w = x_2x_4 \dots x_{2n} \in L'$, אזי קיימת $w' = x_1x_2x_3 \dots x_{2n} \in L$ (ל-$x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ כלשהם) כך ש-A מקבל אותה.

אזי קיימת ריצה מקבלת ב-A על w': $q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} q_2 \xrightarrow{x_3} \dots \xrightarrow{x_{2n}} q_F$, כאשר $q_F \in F$.

אזי קיימת ריצה ב-N על w: $(q_0, 1) \xrightarrow{\varepsilon} (q_1, 2) \xrightarrow{x_2} (q_2, 1) \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{x_{2n}} (q_F, 2)$, וריצה זו מקבלת.לפיכך $w \in L(N)$.

תהי $w \in L(N)$, אזי קיימת ריצה מקבלת ב-N על w: $(q_0, 1) \xrightarrow{\varepsilon} (q_1, 2) \xrightarrow{x_2} (q_2, 1) \xrightarrow{\varepsilon} \dots \xrightarrow{x_{2n}} (q_F, 2)$. אזי קיימים $x_1, x_3, \dots, x_{2n-1}$ כלשהם המקיימים את הריצה $q_0 \xrightarrow{x_1} q_1 \xrightarrow{x_2} q_2 \xrightarrow{x_3} \dots \xrightarrow{x_{2n}} q_F$ עבור w הנתונה, ולפיכך A מקבל את $x_1x_2x_3 \dots x_{2n}$, ולכן $w \in L'$, לפי הגדרת L'.

$\Leftarrow$ $L' = L(N)$, ולכן L' רגולרית.

(5)

(a) $L_1 = \{w \mid w \in \{0,1\}^*, w = w^R\}$

טענה: L_1 לא רגולרית:

נניח כי L_1 רגולרית וקבוע הניפוח שלה הוא p. נבחר את המילה $w = 0^p1^p0^p$, וברור כי מתקיים $|w| \geq p$ וכי w היא מילה בשפה. נחלק את w ל-xyz, וכיוון ש-$|xy| \leq p$, ברור כי $y = 0^k$, $1 \leq k \leq p$. עתה נבחר $i = 2$ ונקבל: $w = 0^{(p-k)+2k}1^p0^p = 0^{p+k}1^p0^p$. כיוון ש-$k \geq 1$ מתקיים בהכרח ש-$w \neq w^R$ (לאחר הניפוח), כלומר $w \notin L_1$, שכן הן ייבדלו לפחות בתו ה-$p+1$ שלהן (0 ב-w ו-1 ב-w^R) $\Leftarrow$ סתירה, לפיכך L_1 אינה רגולרית.

(b) (x, y, z מספרים בייצוג בינארי) $\Sigma = \{0,1,\#\},\ L_2 = \{x\#y\#z \mid x, y, z \in \{0,1\}^*, x + y = z\}$

טענה: L_2 אינה רגולרית:

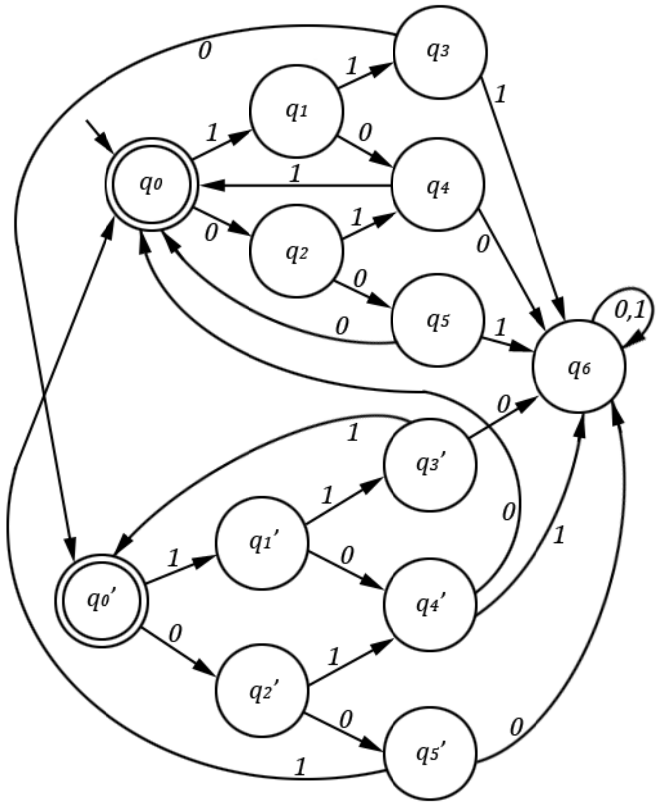
נניח כי L_2 רגולית וקבוע הניפוח שלה הוא p. נבחר את המילה $w = 1^p\#0^p\#1^p$, וברור כי מתקיים $|w| \geq p$ וכי w היא מילה בשפה ($\underbrace{11\dots1}_{p\ times} + \underbrace{00\dots0}_{p\ times} = \underbrace{11\dots1}_{p\ times}$). נחלק את w ל-xyz, וכיוון ש-$|xy| \leq p$, ברור כי $y = 1^k$, $1 \leq k \leq p$. עתה נבחר $i = 0$ ונקבל: $w = 1^{p-k}\#0^p\#1^p$. כיוון ש-$k \geq 1$ מתקיים כי עבור $1 \leq k \leq p-1$ סכום $x + y$ הוא בין 1 ובין $\underbrace{11\dots1}_{p-1\ times}$, כלומר אינו שווה ל-$z = \underbrace{11\dots1}_{p\ times}$ ולכן $w \notin L_2$; ועבור $k = p$ לא ברור כיצד נסתכל על $x = \varepsilon$: או שנסתכל עליו

כ-0 או שנסתכל עליו ככלום (כלומר אין מחובר ראשון בסכום $x+y$), כך או כך גם עבורו מתקיים $x+y\neq z$ ולכן $w\notin L_2 \Leftarrow$ סתירה, לפיכך L_2 אינה רגולרית.

(c) $L_3=\{\,x_1y_1z_1 \dots x_ny_nz_n \mid x=x_n \dots x_1, y=y_n \dots y_1, z=z_n \dots z_1, x+y=z\}$,$\Sigma=\{0,1\}$, x,y,z מספרים בייצוג בינארי.

טענה: L_3 רגולרית:

להלן אוטומט המקבל את L_3:



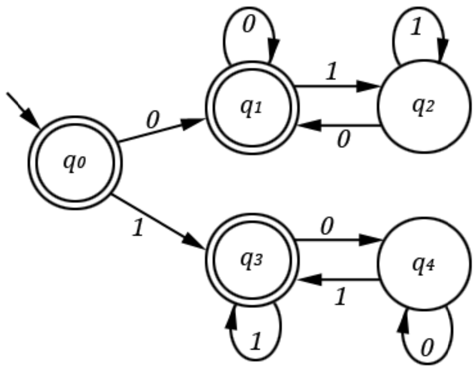
הסבר:

האוטומט בודק קיום חיבור בינארי. q_0 מייצג תחילת חיבור עם $carry=0$, ו-${q_0}'$ - עם $carry=1$. $q_3-q_5, q_3'-{q_5}'$ מקבלים את התו המייצג את z_i, ובהתאם לתוצאה עוברים למצב המתאים: אם התוצאה נכונה, עוברים ל-q_0 או ${q_0}'$ (בהתאם ל-$carry$), ואם היא לא, עוברים למצב q_6 שאינו מקבל עד סוף הריצה. האוטומט יקבל אמ״מ לכל x_i, y_i הביט ה-z_i קיים ותוצאתו נכונה בהתאם לדרישה.

(d) $\Sigma = \{0,1\}, L_4 = \{w \mid \#'01' in\ w = \#'10' in\ w\}$

טענה: L_4 רגולרית:

להלן אוטומט המקבל את L_4:



הסבר:

נסמן את מספר ה-$'01'$ כ-n, ואת מספר ה-$'10'$ כ-m, ובמצב ההתחלה $n = m$. תו ההתחלה של w הוא שקובע את הלולאה: אם התחלנו עם 0, נוסיף $'01'$ כאשר נגיע ל-$'1'$ הראשון, ובמצב זה $n > m$, לכן לא נקבל. כאשר נגיע לאחר מכן שוב ל-$'0'$, נקבל שוב $m = n$. באופן דומה עבור $'1'$ כפותח המחרוזת.

(6)

(a) להלן אלגוריתם לפתרון *Clique* במקום פולינומיאלי:

יהי $G = \{V, E\}$ גרף לא מכוון ו-k מספר טבעי, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ($|V| = n$). באלגוריתם נסמן את Q כקבוצת ה-*Clique* עליה נעבוד, כאשר $Q \leftarrow v \equiv$ הוסף את צומת v ל-Q; $remove(Q, v) \equiv$ הסר את v מ-Q.

$Clique(< G, k >) \coloneqq$

$\quad Q \leftarrow \emptyset$

$\quad for\ i \coloneqq 1\ to\ n\ do:$

$\quad\quad Q \leftarrow v_i$

$\quad\quad find\_Clique(Q)$

$\quad\quad remove(Q, v_i)$

$\quad \boldsymbol{return\ F}$

where:

$find\_Clique(Q) \coloneqq$

$\quad for\ each\ v \in V \backslash Q\ do:$

$\quad\quad if\ adjacent\_to\_all(v, Q)\ \ then\ \ Q \leftarrow v\ (returns\ T\ iff\ v\ is\ adjacent\ to\ all\ u \in Q)$

$\quad\quad if\ |Q| = k\ then\ \boldsymbol{return\ T}$

$\quad\quad else\ find\_Clique(Q)$

$\quad\quad remove(Q, v)$

נכונות האלגוריתם ברורה: האלגוריתם בודק כל *Clique* הקיים ב-G ומחזיר T אם מוצא אחד שגודלו k, ו-F אחרת. האלגוריתם תופס מקום לינארי בלבד, שכן שומר אך ורק את ה-*Clique* הנוכחי אותו בונה/בודק, שהוא לכל היותר V.

(b) להלן הוכחה ש-$QSAT \in NP - Hard$:

נראה רדוקציה פולינומיאלית $3SAT \leq_p QSAT$:

נגדיר f תוכנית שבהינתן φ מחזירה $\psi =' \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_k . \varphi'$, כאשר $x_1, \dots, x_k$ הם המשתנים המופיעים ב-φ.

נכונות:

ברור כי f חשיבה, סה״כ מעתיקים את φ יחד עם משתנים נוספים המופיעים בנוסחה. כמו כן, f פולינומיאלית כיוון שסה״כ עוברת על φ ומייצרת נוסחה חדשה המוסיפה ביטוי בגודל (מספר המשתנים ב-φ) $\cdot 2$.

מתקיים: $\varphi \in 3SAT$ $\Leftrightarrow$ קיימת הצבה מקבלת ל-φ $\Leftrightarrow$ קיימים $x_1, \dots, x_k \in \{T, F\}$ שהצבתם ב-φ מקבלת $\Leftrightarrow$ $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_k . \varphi$ (נוסחה כמתית בעלת ערך אמת) $\psi \in QSAT \Leftrightarrow$.

$\Leftarrow$ כיוון ש-$3SAT \in NP - Hard$ אזי גם $\boldsymbol{QSAT \in NP - Hard}$.