מס' מחברת: 98

מבחן מועד א' במודלים חישוביים, סמסטר א' 2008/9

:ית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' נחום דרשוביץ
מתרגלים: אורי להב ויהונתן ברנט

23.2.09

הוראות

1. **מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.**
2. משך הבחינה – **שלוש שעות.** חומר עזר מותר: **שני** דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד.
3. יש לענות על השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה) ועל השאלות הסגורות בטופס התשובות.
   מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
4. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
5. יש למלא בטופס התשובות שם, מספר ת.ז **ומספר גרסה.**
6. במבחן 3 שאלות "פתוחות" ו-11 שאלות "סגורות".
   א. בנוגע לשאלות הפתוחות:
   - הניקוד לכל שאלה הוא 15 נקודות.
   - הניקוד לכל סעיף מופיע בסוף הסעיף.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון ואין לחרוג ממנו.
   - יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות יגררו הורדת נקודות.
   - תשובה נכונה לא מנומקת **תזכה ב-30% מהנקודות.** תשובה נכונה עם נימוק שגוי לא תקבל נקודות כלל.

   ב. בנוגע לשאלות הסגורות:
   - הניקוד לכל שאלה הוא 5 נקודות.
   - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בדף התשובות המצורף.
   - יש לזכור למלא שם, ת.ז. **ומספר גרסה** בדף התשובות המצורף.
7. נא לכתוב בכתב ברור.
8. כל המספרים המופיעים בהגדרות הם מספרים שלמים, אי שליליים, ונתונים בייצוג בינארי, אלא אם כן נאמר במפורש אחרת.
9. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדוייק. כל טענה אחרת יש להוכיח.
10. בסוף המבחן מצורף דף שאלות. שאלות בנוגע לבחינה יש לכתוב בדף השאלות, לקרוע את החלק הרלוונטי ולהגיש לאחד הבוחנים. **לא תתאפשרנה שאלות בעל פה במהלך הבחינה.**
11. **בכל השאלות הניחו כי: NP≠coNP ו-NP≠P, למעט אם נאמר אחרת.**

בהצלחה!

לשימוש משרדי בלבד		
1 א	8	3
1 ב	7	3
2	15	4
3 א	8	1
3 ב	7	7

25

מס' מחברת: 48

חלק א'

<u>שאלה 1</u> (15 נקודות)

<u>הגדרה</u>: פונקציה $f:N\rightarrow N$ גדלה מהר יותר מפונקציה $g:N\rightarrow N$ אם קיים n_0 כך ש-$f(n)>g(n)$ לכל $n>n_0$.

א. הוכח או הפרך: לכל סדרה אינסופית של פונקציות $g_1, g_2, \ldots$ (פונקציות ב-$N\rightarrow N$) קיימת פונקציה f שגדלה מהר יותר מכל פונקציה g_i בסדרה (8 נקודות)

נכון/~~לא נכון~~ ← סימנתי טעות (נכון)

~~נניח בשלילה שהטענה נכונה.~~
~~נקח את f בסדרה [illegible] הפונקציה N→N, כלומר היא סדרה אינסופית~~
~~של פונקציות, [illegible] לה f פונקציה שהיא N→N מופיעה בה.~~
~~לפי הנתון בשלילה, קיימת פונ' f:N→N כך שקיים n_0 שעבורו~~
~~מתקיים שלכל N→N g מהסדרה: לכל $n>n_0$: $f(n)>g(n)$.~~
~~כיון ש-f היא פונקציה N→N אזי היא מופיעה באינדקס מסוים בסדרה זו,~~
~~כלומר קיים m כך ש- $g_m=f$. אם כן, אזי מתקיים הפסוק שלכל~~
~~$n>n_0$ מתקיים ש- $f(n)>g_m(n)$. נקח n_1 כלשהו ש- $n_1>n_0$, אזי~~
~~נקבל ש- $f(n_1)>g_m(n_1)=f(n_1)$, כלומר: $f(n_1)>f(n_1)$, וזו סתירה.~~
~~לכן הטענה אינה נכונה.~~
~~הערה: לא משנה לנו אם הפונקציה f חשיבה או לא, מה שחשוב הוא~~
~~שהיא N→N, כלומר תמיד תחזיר לכל מספר טבעי מספר טבעי.~~
~~לא התבלבלתי בין f לבין פונקציה חשיבה (לא [illegible]~~
~~אם ניתן לכתוב ל-f תוכנית מחשב שמחשבת אותה וכו').~~

נקח את סדרת <u>כל</u> הפונ' N→N, ונראה שיש לה f כזו (לא חשיבה אמנם, אך קיימת) וברור ש-f זו תתאים לכל סדרה אחרת אינסופית של פונקציות N→N. אם כן נגדיר את f באופן הבא:

$$f(n) := \max\{g_i(n) \mid i\in N\}+1, \forall n\in N$$

מהגדרת f, מתקיים שלכל $n\in N$, f היא המקסימום מבין כל פונ' מהסדרה הכוללת את כל הפונ' N→N. כיון שכל פונ' בסדרה מחזירה מספר טבעי, הרי שגם f תחזיר ולכן עונה על ההגדרה שהטווח שלה הוא N.

max לא מוגדר היטב כאן אינסוף פונ'

אין כזו הפונקציה היא א

3/8

מס' מחברת: 48

ב. הוכח או הפרך: לכל סדרה אינסופית של פונקציות $g_1, g_2, \ldots$ (פונקציות ב-N→N) קיימת פונקציה **חשיבה** f שגדלה מהר יותר מכל פונקציה g_i בסדרה (7 נקודות).

נכון / לא נכון

נניח שהסדרה נתונה.

נקח את סדרת הפונקציות המוכרת של הפונ' N→N הקיימות.

~~[illegible]~~ לפי ההנחה, קיימת $f: N \to N$ חשיבה וקיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ ולכל i: $f(n) > g_i(n)$, כאשר g_i הוא פונ' בסדרה.

לכן, קיים אינדקס k כלשהו עבורו $g_k = f$, כיוון ש-f היא גם פונ' N→N. נקח n_1 כלשהו המקיים $n_1 > n_0$, אזי אמור להתקיים $\forall i, f(n_1) > g_i(n_1)$, ובפרט: $f(n_1) > g_k(n_1) = f(n_1)$, כלומר קיבלנו ש- $f(n_1) > f(n_1)$, וזו סתירה. התבססנו על ההגדרה ש-f היא פונ' חשיבה בכך שהיא אמורה להתקיים לכל n, ולכן ניתן לחשב את $f(n)$ לכל n שהוא ולהגיע לסתירה.

לפיכך הטענה אינה נכונה.

לא ניתן לסדר אותן בסדרה. (אלכסון)

לא השתמשת בכך ש-f חשיבה.

-4

גרסה ד'

מס' מחברת: 48

<u>שאלה 2</u> (15 נקודות)

נתבונן בשפה הבאה:

VC-half-IS = {<G,k> : G is an undirected graph with a Vertex Cover, S, of size k and an Independent Set, T, of size k/2, and T⊆S}

האם השפה VC-half-IS ב-P או ב- NPC ? הוכח.

P / NPC

<u>תחילה נראה שהשפה ב-NP:</u>

בהינתן $\langle G,k\rangle$ נבנה עדות w המכילה את Z (קבוצת הקודקודים המהווה VC שגודלה $\geq k$) ואת T. אורך העדות הוא לכל היותר $2\cdot|V|$ (אם S ו-T מכילים את כל הקודקודים ב-G), וזהו הוא באורך פולי' לגודל הקלט. כמו כן הבדיקה היא פולי': בודקים ש-Z אכן בגודל $\leq k$, ועוברים על הקשתות ובודקים שאם לא קיים עלה $Z\not\ni$ אשר... כמו כן בודקים שאין קשתות בין שני קודקודים $u,v\in T$, ושגודל $T\leq\frac{k}{2}$.

← למעשה משתמשים ב בדיקה פולינומיאלית כמו שעושים עבור השפות VC ו-IS.

⇐ השפה ב-NP.

נראה רדוקציה פול' $IS\leq_p VC\text{-half-}IS$: $\langle G,k\rangle\xrightarrow{f}\langle G',k'\rangle$

בהינתן G,k (שהם קלט של IS) נגדיר G',k' באופן הבא:

- G' זהה לגרף המקורי G, רק שנוסיף ל-V' קודקוד חדש $v\notin V$, ונחבר בקשתות לכל קודקודי הגרף המקורי.
- $k':=2k$

~~הרדוקציה~~ <u>הרדוקציה פולינומיאלית</u>: סה"כ מגדירים $k'=2k$ (בזמן קבוע) ומוסיפים M קשתות חדשות ועוד קודקוד ← זה פולינומיאלי בגודל הקלט G,k.

<u>נכונות הרדוקציה</u>:

ראשית נציין כי ב-G' (אם $1\leq k$) תמיד יהיה VC בגודל $\geq k'$, כיוון ש-v שהוספנו ל-V' הוא VC כזה, שכן מחובר לכל קודקודי הגרף. כמובן שעבור $k=0$ נבדוק תחילה האם G' הוא הגרף הריק, ואם לא - ברור שאין VC מגודל ≤ 0 ונחזיר F.

ואז כן נקבל שמתקיים: ~~[illegible]~~

ב-G יש IS בגודל k ⟺ ב-G' יש IS בגודל $\frac{k'}{2}=k$. ברור ש-v שהוספנו לא יכול להיות חלק מה-IS ב-G' שאינו G, כיוון שמחובר לכל קודקוד ב-G'.

ולכן אם $\langle G,k\rangle\in IS$ ⇐ ב-G יש IS בגודל k ⇐ ב-G' יש IS בגודל $\frac{k'}{2}=k$. (וכמובן יש בו VC בגודל $\geq k'$)

ואם $\langle G,k\rangle\notin IS$ ⇐ ב-G אין IS בגודל k ⇐ ב-G' אין IS בגודל $\frac{k'}{2}=k$.

כיון ש-$IS\in NPC$ אז $VC\text{-half-}IS\in NP\text{-hard}$, ובתוספת השייכות ל-NP: $VC\text{-half-}IS\in NPC$

כנדרש ■

לא נכון
לא מוכח
ה VC
קטן
לקודקוד k-ט

לא נכון
זה לא
ישר קודקוד
ה'יו
נתינה?

לא זכרו
הגדרת
$T\subseteq S$?

4/15

מס' מחברת: 48

<u>שאלה 3</u> (15 נקודות)

א. הוכח או הפרך: $\{0^m : \exists n\in N\ m = n^3\}$ רגולרית (8 נקודות).

נכון / לא נכון

<u>הוכחה:</u> נסמן את השפה ב-L.

נניח כי השפה היא כן רגולרית ולכן קיים קבוע ניפוח $p>0$.

כל מילה בשפה היא מהצורה $0^m = 0^{n^3}$, $m,n\in \mathbb{N}$.

נסתכל על המילה $w = 0^{p^3} = 0^p\cdot 0^{p^3-p}$. ברור שלכל $p>0$ מתקיים ש-

$w\in L$ וגם $|w|\ge p$. לכן לפי נתוני למת הניפוח חלוקה של

w: $w=xyz$ כך ש- $|xy|\le p$ וגם $|y|\ge 1$. לפי תנאים אלו,

y יהיה מורכב מ-k אפסים, כאשר $1\le k\le p$. לכל חלוקה כזו נבחר

את הניפוח (הורדה) להיות $i=0$, ונקבל את המילה הבאה:

$w' = 0^{p-k}\cdot 0^{p^3-p}$ כלומר: $w'=0^{p^3-k}$, $1\le k\le p$.

כיוון ש- $1\le k\le p$, לא מתקיים ש- $\sqrt[3]{p^3-k}=n$ הוא מספר טבעי,

ולכן $w'\notin L$, בסתירה לכך ש-L היא רגולרית.

$\Leftarrow$ השפה L אינה רגולרית.

מס' מחברת: 48

ב. הוכח או הפרך: לכל שפה L, אם $\{|w| : w \in L\}$ מכילה סדרה חשבונית אינסופית אז L כריעה (7 נקודות).

נכון / לא נכון

נסתכל על השפה: $\overline{Halt_{TM}} = \{<M,x> \mid M$ היא מ"ט שלא עוצרת על $x\}$

ידוע מהשיעורים ש- $\overline{Halt_{TM}} \notin R$ (הוא ב- $coRE \setminus R$).

נסתכל על מכונת טיורינג M' המקבלת את השאלה הבאה: לכל קלט x, המכונה מבצעת ימינה עד אינסוף -כלומר M' שולחת לפונקציה loopy() שלמעלה. לפיכך, יתקיים כי לכל $x \in \Sigma$ (עם $\Sigma = \{0,1\}^*$) מתקיים ש- $<M',x> \in \overline{Halt_{TM}}$. נסמן את אורך M' ב- N, ואורך התווים $<$, $>$ יחד הוא שלוש. סה"כ יתקיים כי ב- $\overline{Halt_{TM}}$ יש מילים באורך: $N+3+|x|$ לכל x מ- Σ. לפיכך ניתן לקחת לסדרה החשבונית שלנו את x שכל פעם ארוך יותר ב-1. למשל:

$$a_0 = |<M', 1>|$$
$$a_1 = |<M', 11>|$$
$$a_2 = |<M', 111>| \dots$$

וברור שזוהי סדרה חשבונית אינסופית שבה $a_0 = |<M',1>|$ ו- $d=1$, כי כל איבר ארוך מקודמו בדיוק ב-1.

לכן הוכחנו כי מצאנו את הסדרה, ולפיכך הטענה איננה נכונה.

מס' מחברת: 48

חלק ב'

1. נתונה השפה הבאה:

L = {<p,n> : program p halts on all inputs or |p|>n}

המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה שייכת שפה זו היא:

א. R
ב. RE
ג. coRE
ד. תשובות א'-ג' אינן נכונות

2. נגדיר את הפעולה perm על מחרוזת w באופן הבא:

perm(w) = { w' : w' is a permutation [=תמורה] of w}

(פרמטוציה של מילה w מתקבלת ע"י שינוי סדר התווים במילה).

נגדיר את הפעולה perm על שפה L באופן הבא:

$perm(L) = \cup_{w \in L}\, perm(w)$

א. השפות הרגולריות סגורות תחת הפעולה perm
ב. השפות חסרות ההקשר סגורות תחת הפעולה perm
ג. תשובות א'-ב' נכונות
ד. תשובות א'-ג' אינן נכונות

3. הדקדוק הכללי הבא מייצר שפה מעל {1,2,+,(,)}:

S → (A+B)
A+B → N+N | S+S
N → 1 | 2

המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה שייכת השפה של דקדוק זה היא:

א. השפות הרגולריות
ב. השפות חסרות ההקשר
ג. השפות הכריעות
ד. אף אחת מהנ"ל

מס' מחברת: 48

4. תהא $M_1, M_2, \ldots$ אנומרציה המכילה את כל מכונות הטיורינג מעל הא"ב בינארי. נאמר שתכנית f בשפת Scheme היא סימולטור, אם f(i) מחזירה את הפלט עבור ריצה של M_i על הקלט הריק או לא עוצרת במידה ו-M_i לא עוצרת.

בחר בטענה החזקה ביותר הנכונה:

א. לא קיימים סימולטורים
ב. יש מספר סופי של סימולטורים
ג. יש מספר אינסופי של סימולטורים
ד. התשובה תלוייה באנומרציה

5. נתונות שתי בעיות הכרעה:

A: קלט: תכנית מחשב p בשפת Scheme
שאלה: האם קיימת p' בשפת Scheme כך ש-L(p)=L(p') ו-p' קצרה מ-2008 שורות?

B: קלט: תכנית מחשב p בשפת Scheme
שאלה: האם קיימת p' בשפת Scheme כך ש-L(p)≠L(p') ו-p' קצרה מ-2008 שורות?

× א. A כריעה ו-B אינה כריעה.
ב. A אינה כריעה ו-B כריעה.
× ג. A ו-B כריעות.
ד. A ו-B אינן כריעות.

6. נתונה בעיית הכרעה:

קלט: גרף (לא מכוון) G=(V,E) בו דרגת כל קודקוד $\leq |V|-9$ ומספר k.
שאלה: האם ב-G יש Independent Set בגודל $\leq k$?

המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה שייכת בעיה זו היא:

א. P
ב. NP
ג. coNP
ד. NPC

מס' מחברת: 48

7. נתונה בעיית הכרעה:

קלט: גרף (לא מכוון) $G=(V,E)$ עם מספר אי זוגי של קודקודים.
שאלה: האם $|MAX\_IS(G)|$ זוגי או $|MIN\_VC(G)|$ זוגי?

$MAX\_IS(G)$ הינו ה-Independent Set המקסימלי.
$MIN\_VC(G)$ הינו ה-Vertex Cover המינימלי.

המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה שייכת בעיה זו היא:

א. P
ב. NP
ג. coNP
ד. NPC

8. נגדיר אוטומט לא דטרמיניסטי חדש AFA (All-paths Finite Automata) אשר הינו דומה ל-NFA רגיל, פרט לכך שבהינתן אוטומט כזה A נאמר שמחרוזת $w \in L(A)$ אם **כל** חישוב אפשרי של A על w מסתיים במצב מקבל.

א. כל שפה המזוהה על-ידי אוטומט AFA היא רגולרית
ב. כל שפה רגולרית מזוהה על-ידי אוטומט AFA
ג. תשובות א'-ב' נכונות
ד. תשובות א'-ג' אינן נכונות

9. נתונה בעיית הכרעה:

קלט: קבוצה $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, אוסף $F=\{F_1,\ldots F_m\}$ של תת קבוצות של X ומספר k.
שאלה: האם יש k איברים שונים ב-F: $F_{i1},\ldots,F_{ik}$ כך שלכל שניים מהם יש חיתוך לא ריק?

המחלקה הקטנה ביותר ביחס להכלה אליה שייכת בעיה זו היא:

א. P
ב. NP
ג. coNP
ד. NPC

מס' מחברת: 48

10. דקדוקים לינאריים הם דקדוקים חסרי הקשר בהם כל חוק הוא באחת משתי הצורות הבאות:

$A \rightarrow xBy$
$A \rightarrow \varepsilon$ (המחרוזת הריקה)

כאשר $x,y \in \Sigma^*$ ו-$A,B \in V$. נאמר ששפה היא לינארית אם יש דקדוק לינארי שמייצר אותה.

א. כל שפה רגולרית היא לינארית
ב. כל שפה לינארית היא רגולרית
ג. תשובות א'-ב' נכונות
ד. תשובות א'-ג' אינן נכונות

11. ידוע שכל שפה המוכרעת על ידי מכונת טיורינג המסוגלת רק לקרוא מהסרט אך לא לכתוב, היא רגולרית. נניח שנוסיף למכונת טיורינג כזו סרט עבודה לקריאה וכתיבה בגודל קבוע כלשהו.

תהי C מחלקת השפות הניתנות להכרעה על-ידי מכונת טיורינג זו.
מגדירים: SPACE(f(n)) היא מחלקת השפות שניתן להכריע ב-f(n) מקום.

א. המחלקה C שווה למחלקת השפות הרגולריות
ב. המחלקה C מכילה ממש את מחלקת השפות הרגולריות ומוכלת ממש במחלקה SPACE(1)
ג. קיים קבוע k כך שהמחלקה C שונה מהמחלקה SPACE(k)
ד. המחלקה C שווה למחלקה SPACE(n), כאשר n הוא גודל הקלט