אנליזה נומרית / תרגיל בית 3#

אריאל סטולרמן

(1)

(a) for$x \in [0,2]$:

$|\sin(x) - P_n(x)| = f[x_0, \dots, x_n, x] \cdot \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i) \underset{\eta \in \{interval\ that\ contains\ x_0,\dots,x_n,x\}}{=} \dfrac{f^{(n+1)}(\eta)}{n!} \cdot \Pi_{i=0}^{n}(x - x_i) \leq$

$f^{(n+1)}(\eta) \cdot \frac{2^{n+1}}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, since $f^{(n+1)}(\eta)$ is a constant ≥ 0 and $2^{n+1} \in o(n!)$ $\big(n! \in O(n^n)\big)$.

ומכאן שכאשר $n \to \infty$ השגיאה שואפת ל-0.

(b) לפי הגרפים המתקבלים נראה כי המסקנה לעיל לא נכונה, השגיאה לא שואפת ל-0.

(c) נראה שיותר נקודות לא מבטיחות בהכרח קירוב טוב יותר.

(2)

$f(x) = \sqrt{x}$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	2
2	9	3

(a)

Lagrange's formula for $P_2(x)$:

- $l_0(x) = \frac{x-4}{1-4} \cdot \frac{x-9}{1-9} = \frac{1}{24}(x-4)(x-9)$
- $l_1(x) = \frac{x-1}{4-1} \cdot \frac{x-9}{4-9} = -\frac{1}{15}(x-1)(x-9)$
- $l_2(x) = \frac{x-1}{9-1} \cdot \frac{x-4}{9-4} = \frac{1}{40}(x-1)(x-4)$

$$\Rightarrow P_2(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i) \cdot l_i(x) = \frac{1}{24}(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}(x-1)(x-4) =$$

$$= \frac{5(x^2 - 13x + 36) - 16(x^2 - 10x + 9) + 9(x^2 - 5x + 4)}{120} = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}$$

(b)

Newton formula for $P_2(x)$:

$$P_2(x) = f[1] + f[1,4](x-1) + f[1,4,9](x-1)(x-4)$$

$$\begin{cases} f[1] = f(1) = 1 \\ f[4] = f(4) = 2 \\ f[9] = f(9) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f[1,4] = \dfrac{f[1] - f[4]}{1-4} = \dfrac{1}{3} \\ f[4,9] = \dfrac{f[4] - f[9]}{4-9} = \dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow f[1,4,9] = \frac{f[1,4] - f[4,9]}{1-9} = -\frac{5-3}{15 \cdot 8} = -\frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow P_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x^2 - 5x + 4) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{25}{60}x + \frac{36}{60} = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}$$

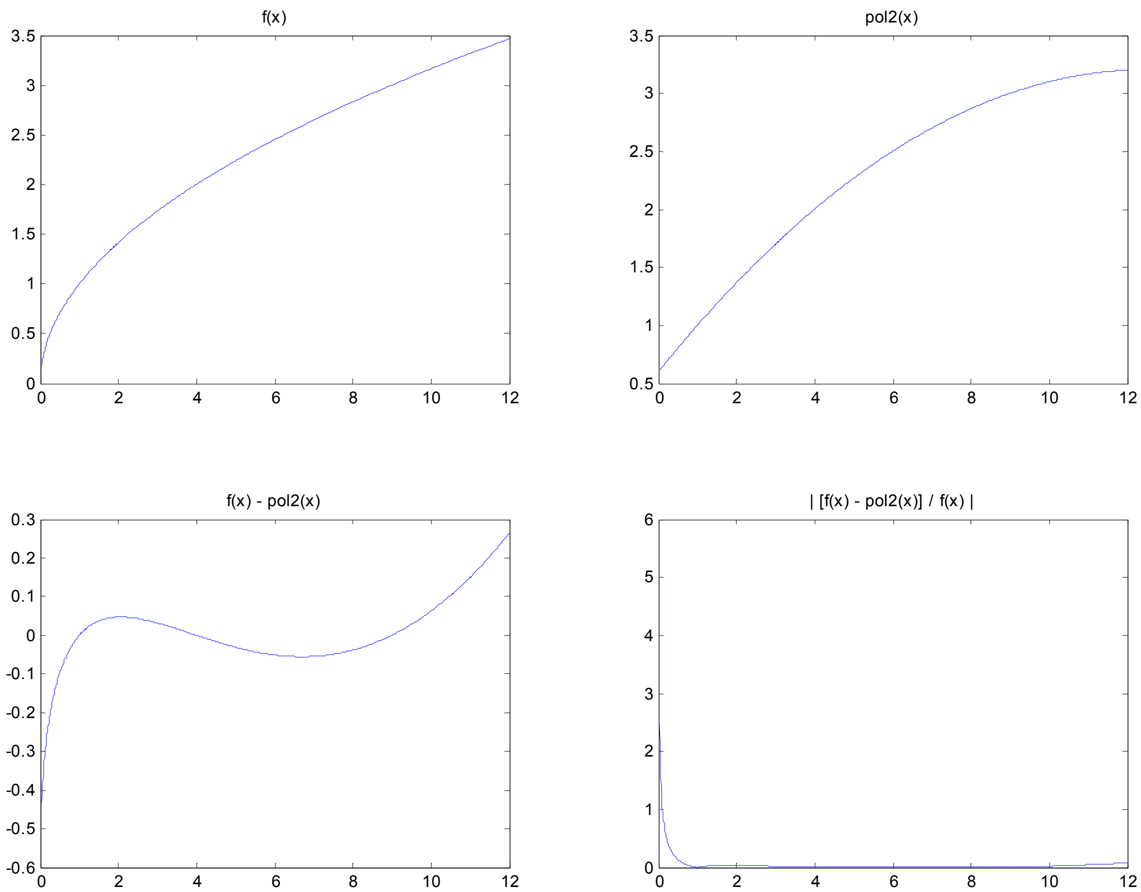
(c) שתי הנוסחאות אכן מניבות את אותה תוצאה (והתוצאה גם זהה לאינטרפולציה הישירה מתרגיל בית 2#).

(d) להלן הקוד למימוש $P_2(x)$:

```
function[result] = pol2(x)
coeff=[-1/60,5/12,3/5]
result = polyval(coeff,x)
```

(e)

```
>> subplot(2,2,1)
>> plot(x,sqrt(x))
>> title('f(x)')
>> subplot(2,2,2)
>> plot(x,pol2(x))
>> title('pol2(x)')
>> subplot(2,2,3)
>> plot(x,sqrt(x)-pol2(x))
>> title('f(x) - pol2(x)')
>> subplot(2,2,4)
>> plot(x,abs((sqrt(x)-pol2(x))./sqrt(x)))
>> title('| [f(x) - pol2(x)] / f(x) |')
```



(f) נראה כי הקירוב טוב בתוך קטע האינטרפולציה, בייחוד בקרבה לנקודות האינטרפולציה, ונהיה גרוע בקצוות.

(g)

(h)

נוסיף לאינטרפולציה את הנקודה $(0,0)$:

עבור אינטרפולציית Lagrange נצטרך להוסיף איבר במכפלה לכל פולינום: $\frac{x}{x_i}$, ובנוסף להוסיף את הפולינום $l_3(x)$, ומכאן נקבל:

- $l_0(x) = \frac{x-4}{1-4} \cdot \frac{x-9}{1-9} \cdot \frac{x}{1} = \frac{1}{24} x(x-4)(x-9)$
- $l_1(x) = \frac{x-1}{4-1} \cdot \frac{x-9}{4-9} \cdot \frac{x}{4} = -\frac{1}{60} x(x-1)(x-9)$
- $l_2(x) = \frac{x-1}{9-1} \cdot \frac{x-4}{9-4} \cdot \frac{x}{9} = \frac{1}{360} x(x-1)(x-4)$
- $l_3(x) = \frac{x-1}{-1} \cdot \frac{x-4}{-4} \cdot \frac{x-9}{-9} = -\frac{1}{36} (x-1)(x-4)(x-9)$

$$\Rightarrow P_3(x)=\frac{1}{24}x(x-4)(x-9)-\frac{2}{60}x(x-1)(x-9)+\frac{3}{360}x(x-1)(x-4)+0=$$

$$=\frac{5(x^3-13x^2+36x)-4(x^3-10x^2+9x)+(x^3-5x^2+4x)}{120}=\frac{1}{60}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{37}{30}x$$

עבור אינטרפולצית Newton נצטרך להוסיף כמה חישובי הפרשים מחולקים ואת המחובר $f[1,4,9,0](x-1)(x-4)(x-9)$:

$$\begin{cases}\dots\\ f[0]=f(0)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dots\\ f[9,0]=\frac{f[9]-f[0]}{9-0}=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dots\\ f[4,9,0]=\frac{f[4,9]-f[9,0]}{4-0}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{4}=-\frac{1}{30}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f[1,4,9,0]=\frac{f[1,4,9]-f[4,9,0]}{1-0}=-\frac{1}{60}+\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$$

$$\Rightarrow P_3(x)=\underbrace{-\frac{1}{60}x^2+\frac{5}{12}x+\frac{3}{5}}_{P_2(x)}+\frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)=-\frac{1}{60}x^2+\frac{5}{12}x+\frac{3}{5}+\frac{1}{60}(x^3-14x^2+49x-36)=$$

$$=\frac{1}{60}x^3-\frac{15}{60}x^2+\frac{74}{60}x+0=\frac{1}{60}x^3-\frac{1}{4}x^2+\frac{37}{30}x$$

הפולינום אכן יוצא זהה בשתי האינטרפולציות הנ"ל.

מחזרות על סעיפים (a)-(c) בלבד לא ניתן לראות האם ישנו שיפור בקירוב או לא (הייתם צריכים לדרוש לחזור גם על סעיפי הגרפים וחישוב הטעות, שהם (d)-(e)).

(3)

נוכיח את הזהות $\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$ באמצעות אינטרפולציה על הפונקציה הקבועה $f(x)=1$. ברור כי עבור 2 נקודות ומעלה הפולינום שיתקבל מהאינטרפולציה עליהם הוא הפולינום הקבוע 1, שהוא גם הפונקציה (ופונקציית השגיאה תהיה הפונקציה הקבועה 0).

אם כן, יהיו $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ נקודות כלשהם על הישר, בה"כ $0,1,\dots,n$, כאשר ערך f בכל נקודה הוא 1. מנוסחת אינטרפולצית Lagrange ידוע כי:

$$\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot l_k(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)=1$$

וערך זה יחיד. מכאן הוכחת הזהות.

(4)

(a)

$$f[x_0,x_1]=\frac{f[x_0]-f[x_1]}{x_0-x_1}=\frac{-(f[x_0]-f[x_1])}{-(x_0-x_1)}=\frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}=f[x_1,x_0]$$

(b)

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_0,x_1]-f[x_1,x_2]}{x_0-x_2}=\frac{f[x_1,x_0]-f[x_2,x_1]}{x_0-x_2}=\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}=f[x_2,x_1,x_0]$$

על אותו משקל מתקיים גם: $f[x_2,x_0,x_1]=f[x_1,x_0,x_2]$ ו-$f[x_1,x_2,x_0]=f[x_0,x_2,x_1]$. נותר להראות שוויון בין נציגי כל זוג:

$$f[x_2,x_1,x_0]-f[x_1,x_2,x_0]=\frac{f[x_2,x_1]-f[x_1,x_0]}{x_2-x_0}-\frac{f[x_1,x_2]-f[x_2,x_0]}{x_1-x_0}=$$

$$\frac{(x_1-x_2)f[x_1,x_2]+(x_0-x_1)f[x_1,x_0]+(x_2-x_0)f[x_2,x_0]}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=\frac{f[x_1]-f[x_2]+f[x_0]-f[x_1]+f[x_2]-f[x_0]}{(x_1-x_0)(x_2-x_0)}=0$$

ומכאן ש-$f[x_2,x_1,x_0]=f[x_1,x_2,x_0]$. באופן דומה ניתן להראות זאת עבור $f[x_2,x_0,x_1], f[x_0,x_2,x_1]$.