אנליזה נומרית / תרגיל בית 6#

אריאל סטולרמן

(1)

$f(x) = x^3 - 3x + 2, r \in [-3,-1]$

א. נחשב את f בקצוות:

$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 2 = -27 + 9 + 2 = -16 < 0$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4 > 0$

כיוון ש-f רציפה בקטע, לפי משפט ערך הביניים ל-f יש שורש בקטע $[-3,-1]$.

ב. מציאת r בצורה אנליטית:

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - 4x + x + 2 = x(x^2 - 4) + (x + 2) = x(x + 2)(x - 2) + (x + 2) = (x + 2)(x^2 - 2x + 1) = (x + 2)(x - 1)^2$$

מכאן בתחום $[-3,-1]$ השורש המבוקש הוא $r = -2$.

ג. איטרצית ניוטון: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 3x_k + 2}{3x_k^2 - 3} = \frac{3x_k^3 - 3x_k - x_k^3 + 3x_k - 2}{3x_k^2 - 3} = \frac{2x_k^3 - 2}{3x_k^2 - 3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x_k^3 - 1}{x_k^2 - 1}$$

ד'-ו'. מימוש האיטרציה ב-Matlab:

```
% roots of x^3 - 3x + 2 in [-3,-1]
r = -2
% initial guess
x = -3
% wanted error
e = 10.^-8

% iterate n times starting at x_0 = x
x_prev = x
iter = 0
while(abs(r-x_prev) > e)
    x_curr = (2./3)*(x_prev.^3-1)./(x_prev.^2-1)
    x_prev = x_curr
    iter = iter + 1
end

% results
iter
x_prev

OUTPUT:
-------
number of iterations:
ans =
     5
x(k):
ans =
  -2.000000000004262

% error vector
e = abs(x - r)
e =
   1.000000000000000   0.333333333333333   0.055555555555555
   0.001949317738791   0.000002528297975   0.000000000004261
```

ז. קבוע ההתכנסות וסדר ההתכנסות: שאלה טובה...

(2)

יהי r שורש של הפונקציה $f(x)$ המקיימת $f'(r)\neq 0$ ו-$f(x)$ גזירה פעמיים ברציפות. תהי $g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$.

א. $g'(r)=0$:

$$g'(x)=\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)'=1-\frac{f'(x)\cdot f'(x)-f''(x)\cdot f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}=1-1+\frac{f''(x)\cdot f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}=\frac{f''(x)\cdot f(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\Rightarrow$$

$$g'(r)=\frac{f''(r)\cdot 0}{\underbrace{\left(f'(r)\right)^2}_{\neq 0}}=0$$

ב. $g''(r)=\frac{f''(r)}{f'(r)}$:

$$g''(x)=\frac{[f'''(x)\cdot f(x)+f''(x)\cdot f'(x)]\cdot\left(f'(x)\right)^2-2f'(x)\cdot f''(x)\cdot f''(x)\cdot f(x)}{\left(f'(x)\right)^4}\Rightarrow$$

$$g''(r)=\frac{[f'''(r)\cdot 0+f''(r)\cdot f'(r)]\cdot\left(f'(r)\right)^2-2f'(r)\cdot f''(r)\cdot f''(x)\cdot 0}{\left(f'(r)\right)^4}=\frac{f''(r)\cdot\left(f'(r)\right)^3}{\left(f'(r)\right)^4}=\frac{f''(r)}{f'(r)}$$

(3)

שיטת Stefesson: $\phi(x)=\frac{f\left(x+f(x)\right)-f(x)}{f(x)}$, $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{\phi(x_n)}$. נראה כי אם השיטה מתכנסת, היא מתכנסת ריבועית:

$$\left|\frac{x_{n+1}-r}{x_n-r}\right|=\left|\frac{x_n-\frac{\left(f(x)\right)^2}{f\left(x+f(x)\right)-f(x)}-r}{x_n-r}\right|=\left|1-\frac{\left(f(x)\right)^2}{(x_n-r)\left(f\left(x+f(x)\right)-f(x)\right)}\right|=\cdots$$

(4)

עבור $x^{\frac{1}{3}}=0$ לא ניתן להשתמש בשיטת ניוטון:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_n^{-\frac{2}{3}}}=x_n-3x_n^{\frac{1}{3}}\cdot x_n^{\frac{2}{3}}=x_n-3x_n=-2x_n$$

וברור כי שיטה זו מתבדרת כאשר $n\to\infty$.

(5)

תהי $F(x,y)=\begin{bmatrix}f(x,y)\\g(x,y)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^2-y^2\\xy+1\end{bmatrix}$

א. מציאת שורשים:

$$\begin{cases}x^2-y^2=0\\xy+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-y)(x+y)=0\\xy=-1\end{cases}\Rightarrow solutions:\{(1,-1),(-1,1)\}$$

ב. איטרציות ניוטון:

$$\overrightarrow{x_{k+1}}=\overrightarrow{x_k}-J_{F_k}^{-1}F(\overrightarrow{x_k})\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_{k+1}\\y_{k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_k\\y_k\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2x_k & -2y_k\\y_k & x_k\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}x_k^2-y_k^2\\x_ky_k+1\end{bmatrix}$$

ג.

```
function [x_np1, y_np1] = F(x_n,y_n)

J = [2*x_n 2*y_n ; y_n x_n]
res = [x_n ; y_n] - (J^-1)*[x_n.^2-y_n.^2 ; x_n*y_n+1]

x_np1 = res(1);
y_np1 = res(2);
```

ד.

```
format long;
clear;
clc;
v = [20,-15];
err = v-[1,-1];
i = 1;
E(i) = sqrt(err(1)^2+err(2)^2);

m = 10^-8;
while (E(i) >m)
    i = i + 1;
    [v(1),v(2)] = F(v(1),v(2));
    err = v-[1,-1];
    E(i) = sqrt(err(1)^2+err(2)^2);
end

plot(E)
```