אנליזה נומרית / תרגיל בית #8

אריאל סטולרמן

(1)

תהי A מטריצה שהע״ע שלה מקיימים $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \cdots > |\lambda_n| > 0$, עם ו״ע u^i בהתאמה כך ש-$u^1 = (0,1,\dots), u^2 = (1,0,\dots)$.

יהי $x^{(0)} = \sum_{i=1}^n u^i$. להלן הוכחה כי $\lim_{k\to\infty} \frac{(A^{k+1}x^{(0)})_i}{(A^k x^{(0)})_i} = \begin{cases}\lambda_2, i=1\\ \lambda_1, i=2\end{cases}$:

$$Ax^{(0)} = A\sum_{i=1}^n u^i \underset{\det(A)\neq 0}{=} \sum_{i=1}^n Au^i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u^i$$

באותו אופן:

$$A^k x^{(0)} = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k u^i$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(A^{k+1}x^{(0)}\right)_1}{(A^k x^{(0)})_1} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{k+1} u^i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^k u^i} = \frac{\lambda_2^{k+1} + \cdots}{\lambda_2^k + \cdots} = \lambda_2, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\left(A^{k+1}x^{(0)}\right)_2}{(A^k x^{(0)})_2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^{k+1} u^i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^k u^i} = \frac{\lambda_1^{k+1} + \cdots}{\lambda_1^k + \cdots} = \lambda_1$$

כיוון שבשמאלי λ_1 מתאפס ומשאיר את λ_2 דומיננטי ובימני λ_1 דומיננטי, ושאר האיברים זניחים (לפי הגדרת u^1, u^2).

(3)

(a)

$h = 0.1: f'(1.2) = -0.9305$

$h = 0.01: f'(1.2) = -0.932$

$h = 0.001: f'(1.2) = -0.93$

(b)

התוצאה הטובה ביותר מתקבלת עבור $h = 0.01$. כיוון שאחד המחוברים בשגיאה מחולק ב-h, כאשר $h \to 0$ השגיאה תשאף ל-∞ ולכן לא נרצה להקטין את h יותר מדי.

(c)

$M = 1: \epsilon = \frac{1}{2}\cdot 10^{-5}$

$h = 0.1: \frac{\epsilon}{h} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-4}, \qquad \frac{Mh^2}{6} = 0.017$

$h = 0.01: \frac{\epsilon}{h} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}, \qquad \frac{Mh^2}{6} = 1.6667\cdot 10^{-5}$

$h = 0.001: \frac{\epsilon}{h} = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}, \qquad \frac{Mh^2}{6} = 1.6667\cdot 10^{-7}$

$\Rightarrow$

$h = 0.1: 0.1705, \quad h = 0.01: 5.16667\cdot 10^{-4}, \quad h = 0.001: 5.00016667\cdot 10^{-3}$

ההסבר כמו קודם, כאשר מקטינים את h יותר מדי השגיאה גדלה.

(d)

$$f(h) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 10^{-5}}{h} + \frac{h^2}{6}$$

ה-h עבורו $f(h)$ הוא מינימלי הוא: $h = 0.02466$

קוד :

```
x = 0.001:0.00001:0.1;
y = (0.5*10^-5)./x+(x.^2)./6

min_y = min(Y);

for x = 0.001:0.00001:0.1
        new_y = (0.5*10^-5)./x+(x.^2)./6;
        if new_y == min_y
                x
        end
end
```

output:

```
x =
        0.024660000000000
```

(5)

נפתח את פולינום טיילור עד הנגזרת השלישית פלוס $O(h^4)$. כיוון שמחפשים קירוב ל-f'' מחלקים במקדם ומקבלים שגיאה אסימפטוטית $O(h^2)$.

(6)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + o(h^5)\ldots$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{bmatrix}, \qquad A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{bmatrix} 21 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -50 & 96 & -72 & 32 & -6 \\ 35 & -104 & 114 & -56 & 11 \\ -10 & 36 & -48 & 28 & -6 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ hf'(x) \\ \frac{h^2}{2}f''(x) \\ \frac{h^3}{6}f'''(x) \\ \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f(x) \\ f(x+h) \\ f(x+2h) \\ f(x+3h) \\ f(x+4h) \end{bmatrix} + o(h^5)$$

$$\frac{h^2}{2}f''(x) = \frac{1}{24}(35f(x) - 104f(x+h) + 114f(x+2h) - 56f(x+3h) + 4f(x+4h) + o(h^5)$$

$$f''(x) = \frac{35f(x) - 104f(x+h) + 114f(x+2h) - 56f(x+3h) + 4f(x+4h)}{12h^2} + o(h^3) \Rightarrow$$

$$a = 35, \;\; b = -104$$