בחינה באנליזה נומרית 1 סמסטר ב' מועד א' תש"ע

המרצה: פרופסור דוד לוין תאריך הבחינה: 2.7.2010

<u>ענה על 4 שאלות</u>

משך הבחינה 3 שעות

אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון ולדף נוסחאות שיחולק עם הבחינה.

יש לנמק כל פתרון

<u>שאלה 1</u>

א. נסח והוכח את המשפט בדבר האופטימליות של פולינומי צ'ביצ'ב.

ב. מקרבים את הפונקציה $\sin(x)$ ברווח $[-\pi/4,\pi/4]$ על ידי אינטרפולציה בנקודות צ'ביצ'ב (לאחר העתקה). מצא כמה נקודות דרושות כדי שהשגיאה תהיה קטנה מ- 10^{-20} .

<u>שאלה 2</u>

הצע שתי דרכים לקירוב אינטגרלים מהצורה

$$\int_0^{2h}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)f(x)dx$$

כאשר f בעלת נגזרות חסומות מכל סדר:

א. תוך שימוש בערכים $f(0), f(h), f(2h)$.

ב. כאשר אפשר לבחור ברווח שלוש נקודות כרצוננו לחישוב ערכי f .

בכל אחד מהמקרים מצא שיטה בעלת סדר קירוב p מקסימלי ($E=O(h^p)$).

אין צורך למצוא את הנוסחה – אלא רק לתאר את הדרך ולמצוא את p.

<u>שאלה 3</u>

עבור f בעלת נגזרת שלישית חסומה ב $[0,1]$ מקרבים את האינטגרל $\int_0^1 (f'(x))^2dx$ על סמך הערכים $h=1/N$, $\{f(ih)\}_{i=0}^n$ באופן הבא:

$$I=\int_0^1 (f'(x))^2dx \approx h\sum_{i=1}^N\left(\frac{f(ih)-f((i-1)h)}{h}\right)^2$$

מצא הערכה לשגיאה בקירוב במונחים של h וחסמים על נגזרות f .

גם כאן, מצא הערכה שנותנת סדר קירוב p מקסימלי.

בחינה באנליזה נומרית 1 סמסטר ב' מועד א' תש"ע

המרצה: פרופסור דוד לוין תאריך הבחינה: 2.7.2010

<u>שאלה 4</u>

נתון כי w פונקציה חיובית על קטע $[a,b]$, ו- $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת פולינומים אורתוגונליים על $[a,b]$ ביחס לפונקצית המשקל w.

א. הוכח כי כל השורשים של כל פולינום מהמערכת $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם פשוטים ונמצאים ב (a,b).

ב. בונים נוסחה לקירוב אינטגרלים $\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$

כאשר $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ הם שרשי הפולינום p_n, וכך שהקירוב יהיה מדויק עבור $f \in \Pi_{n-1}$.

הוכח כי המשקלות $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ בנוסחת האינטגרציה הם חיוביים.

<u>שאלה 5</u>

א. בנה את מערכת המשוואות לאינטרפולציה על יד ספליין ממעלה 2 עם

צמתים ברווחים שווים $x_i = ih,\ i = 0,\dots,n$

עבור אינטרפולציה לערכי פונקציה בנקודות $\{(i+1/2)h\}_{i=0}^{n-1}$

וכן בנקודות $x = 0,\ x = nh$.

הנחייה: השתמש בבסיס בי-ספליין $\{B_i^{(2)}(x)\}_{i=-1}^{n}$

ב. האם יש פתרון יחיד למערכת מחלק א – נמק!

בהצלחה!

(1) (יז) להלן ניסוח והוכחת אופטימליות פולינומי צ'בישב:

ראשית אומר שאם נשתמש בשורשי פולינום צ'בישב $T_{n+1}(x)$ כ-$n+1$ נקודות עליהן נבצע אינטרפולציה כדי למצוא פולינום $p_n(x)$ לקירוב הפונקציה f, אזי השגיאה תהיה מינימלית, ולשם כך צריך שמתקיים:

$$\max_{-1\le x\le 1}|x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_0| \ge \max_{-1\le x\le 1}|2^{-n+1}\cdot T_n(x)| = 2^{-n+1}$$

(כאשר מתאימים את f ל-$[-1,1]$ במידת הצורך).

להלן הוכחה לנוסחה זו:

נניח בשלילה כי קיים פולינום $q_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_0$ המקיים: $\max_{-1\le x\le 1}|q_n(x)| < 2^{-n+1}$

נשים לב שלפולינום $2^{-n+1}T_n(x)$ (שהוא פולינום צ'בישב שמקדם המוביל שלו הוא 1) יש $n+1$ נקודות אקסטרמום שהם $\pm 2^{-n+1}$ לסירוגין. מכיוון שהנחנו ש-q חסום ממש ע"י הערכים של $2^{-n+1}T_n$ ב-$n+1$ נקודות (הערכים של אקסטרמום) נסתכל על פולינום השארית:

$r(x)=\underbrace{q_n(x)}_{=x^n+\dots}-\underbrace{2^{-n+1}T_n(x)}_{=x^n+\dots} \Rightarrow r\in\Pi_{n-1}$, ואם כן צריך שהוא יתאפס ב-n נקודות

המונוטוניות של q_n ב-$2^{-n+1}T_n$ אז $r\equiv 0 \Rightarrow q=2^{-n+1}T_n$, ומכאן סתירה למינימליות (כמובן להוכיח הוא ה-minmax המתואר).

הוכחה לכך שכל פולינום שמתאפס ב-n נקודות והוא מדרגה $n-1$, אזי הוא פולינום ה-0:

נניח r הוא פולינום שורשיו $x_0,\dots,x_{n-1}$, אזי נפתח את r סביב x_0 (טיילור):

$$r=\underbrace{r(x_0)}_{=0}+r'(x_0)(x-x_0)+\dots=(x-x_0)\big[\underbrace{r'(x_0)+\dots}_{r_1(x)=}\big]$$

סימנו טיילור הזה מסי' כי r ממעלה $n-1$, ולכן מהנגזרת ה-n והלאה מתאפסים.

נשים לב ש-$r_1\in\Pi_{n-2}$. נמשיך כך בפעמים סביב השורשים עד שנקבל: $r(x)=(x-x_0)\cdot(x-x_{n-2})\cdot r_{n-1}(x)$

כאשר $r_{n-1}\in\Pi_0$, ולפי כך הוא קבוע שמאפס את r בשורש x_{n-1}: $r_{n-1}(x_{n-1})=0$

ולכן $r_{n-1}\equiv 0 \Leftarrow r\equiv 0$.

נשים לב שהערך המקסימלי שמקבל $T_n(x)$ בקטע $[-1,1]$ הוא 1 ולכן מתקיים

$$\max_{-1\le x\le 1}|2^{-n+1}T_n(x)| = 2^{-n+1}$$

כי המקדם המוביל 1

נסתכל עכשיו על הביטוי השגיאה הכללי, כאשר מבצעים אינטרפולציה ב-$n+1$ נקודות:

$$\max_{[-1,1]}|f(x)-p_n(x)| = f[x_0,\dots,x_n,x]\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \le \max_{-1\le\xi\le 1}\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right|\cdot\underbrace{\max_{-1\le x\le 1}\left|\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)\right|}_{\text{שימוש בשורשי פולינום צ'בישב } T_{n+1} \text{ יביא את זה למינימום}} = \frac{2^{-n}}{(n+1)!}\max_{-1\le\xi\le 1}|f^{(n+1)}(\xi)|$$

$\Leftarrow$ שורשי פולינום צ'בישב אופטימליים יבחרו לצורך השגיאה המקסימלית באינטרפולציה

ג) $\sin x$ הקטע $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ [illegible] $[-1,1]$

$x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \Leftrightarrow t \in [-1,1] \Rightarrow$

$t = -1 + \frac{2}{\pi/2}(x + \frac{\pi}{4}) = -1 + \frac{4}{\pi}x + \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{4}{\pi}x$

$x = \frac{\pi}{4}t \Rightarrow \sin(x),\ x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

אז $\sin(\frac{\pi}{4}t),\ t \in [-1,1]$

(סעיף 6) [illegible]

$$E_n(x) \le \frac{2^{-n}}{(n+1)!} \cdot \max_{-1 \le \xi \le 1} \left| \sin^{(n+1)}(\frac{\pi}{4}\xi) \right| < 10^{-20}$$

(I) $(\frac{\pi}{4})^{n+1} \cdot \sin(\frac{\pi}{4})$

(II) $(\frac{\pi}{4})^{n+1} \cdot \cos(0)$

[illegible] $(n+1)$

נבדוק $n=12$ [illegible] (I).

$$E_n(x) \le \frac{2^{-n}}{(n+1)!} \cdot (\frac{\pi}{4})^{n+1} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 4.19 \times 10^{-22} < 10^{-20}$$

נבדוק $n=14$ [illegible] (II).

$$E_n(x) \le \frac{2^{-n}}{(n+1)!} \cdot (\frac{\pi}{4})^{n+1} \cdot 1 = 1.745 \times 10^{-18} \Rightarrow$$ [illegible]

[illegible] $n=12$:

$$E_n(x) \le \frac{2^{-n}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \cdot 1 \underset{n=12}{=} 7.06 \times 10^{-22} < 10^{-20}$$

$\Rightarrow$ עבור $n=12$ הקירוב [illegible] ולכן [illegible]

[illegible] 16

(5) נחלק למצב ברווחים שווים לנקודות $i=0,\dots,n$, ונמצא ספליין ממעלה 2.

נתון מס' המשוואות לאינטרפולציה ע"י ספליין ממעלה 2 כאשר נקודות האינטרפולציה: $\{ih+\frac{h}{2}\}_{i=0}^{n-1}$ ו- $x=0$ ו- $x=nh$.

תחילה נשים לב שמימד מרחב ספליין ממעלה 2 הוא $n+2$ שזה מספר המקדמים המוגדרים כפי לנו, ולכן אני לבנות $n+2$ משוואות כדי לגלות את המקדמים C_i עבור האינטרפולציה:

$$S(x)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_i^{(2)}(x)$$

נשים לב שהמשוואות שלנו הן:

$$S(x_i)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_i^{(2)}(x)$$

עבור $x_i=ih+\frac{h}{2}$, $0\le i\le n-1$

שהן n משוואות, ויש עוד שתי משוואות:

$$S(0)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_i^{(2)}(0)$$

$$S(nh)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_i^{(2)}(0)$$

נפרט את n המשוואות הראשונות:

$$S\left(jh+\frac{h}{2}\right)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_i^{(2)}\left(jh+\frac{h}{2}\right)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_1^{(2)}\left(jh+\frac{h}{2}-(i-1)h\right)$$

רק הגורמים שווים

נשים לב שהגורמים של $jh+\frac{h}{2}$ הם $B_{j-1}^{(2)}(x)$, $B_j^{(2)}(x)$ ו- $B_{j+1}^{(2)}(x)$:

$$B_{i-1}^{(2)}\left(ih+\frac{h}{2}\right)=B_1^{(2)}\Big(\underbrace{ih+\frac{h}{2}-(i-2)h}_{ih+\frac{h}{2}-ih+2h=2\frac{1}{2}h}\Big)=B_1^{(2)}\left(2\tfrac{1}{2}h\right)\Rightarrow u=\frac{2\frac{1}{2}h}{h}-2=\frac{1}{2},$$

$\frac{1}{2}(1-u)^2$ – המשוואה המתאימה לתחום

$$B_i^{(2)}\left(ih+\frac{h}{2}\right)=B_1^{(2)}\Big(\underbrace{ih+\frac{h}{2}-(i-1)h}_{ih+\frac{h}{2}-ih+h=1\frac{1}{2}h}\Big)=B_1^{(2)}\left(1\tfrac{1}{2}h\right)\Rightarrow u=\frac{1\frac{1}{2}h}{h}-1=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}+u-u^2$ – המשוואה המתאימה לתחום

$$B_{i+1}^{(2)}\left(ih+\frac{h}{2}\right)=B_1^{(2)}\left(ih+\frac{h}{2}-(i)h\right)=B_1^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\Rightarrow u=\frac{h}{2}/h=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}u^2$ – המשוואה המתאימה לתחום.

$$\Rightarrow\left.\begin{aligned}B_{i-1}^{(2)}\left(ih+\tfrac{h}{2}\right)&=\tfrac{1}{2}(1-u)^2\Big|_{u=\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{8}\\B_i^{(2)}\left(ih+\tfrac{h}{2}\right)&=\tfrac{1}{2}+u-u^2\Big|_{u=\frac{1}{2}}=\tfrac{3}{4}\\B_{i+1}^{(2)}\left(ih+\tfrac{h}{2}\right)&=\tfrac{1}{2}u^2\Big|_{u=\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{8}\end{aligned}\right\}\Rightarrow S\left(ih+\frac{h}{2}\right)=c_{i-1}\cdot\frac{1}{8}+c_i\cdot\frac{3}{4}+c_{i+1}\cdot\frac{1}{8}$$

ואלו n משוואות מתוך ה- $n+2$ שיש לנו.

עבור שני התנאים הנוספים:

$$S(0)=\sum_{i=-1}^{n}c_iB_i^{(2)}(0)$$

ואותו דבר ל- nh

נמצא את הגורמים של 0 ושל nh

$$B_{-1}^{(2)}(0) = B_1^{(2)}(0-(-1-1)h) = B_1^{(2)}(2h) \Rightarrow u = \frac{2h}{h} - 2 = 0,\quad \tfrac{1}{2}(1-u)^2\big|_{u=0} = \tfrac{1}{2}$$

$$B_0^{(2)}(0) = B_1^{(2)}(0-(-1)h) = B_1^{(2)}(h) \Rightarrow u = \frac{h}{h} - 1 = 0,\quad \tfrac{1}{2} + u - u^2\big|_{u=0} = \tfrac{1}{2}$$

$$B_1^{(2)}(0) = B_1^{(2)}(0-(0)\cdot h) = B_1^{(2)}(0) \Rightarrow u = \frac{0}{h} = 0,\quad \tfrac{1}{2}u^2\big|_{u=0} = 0$$

$$\Rightarrow S(0) = C_{-1}\cdot\tfrac{1}{2} + C_0\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$B_{n-2}^{(2)}(nh) = B_1^{(2)}(\underbrace{nh-(n-3)h}_{nh-nh+3h}) = B_1^{(2)}(3h) \Rightarrow u = \frac{3h}{h} - 2 = 1,\quad \tfrac{1}{2}(1-u)^2\big|_{u=1} = 0$$

$$B_{n-1}^{(2)}(nh) = B_1^{(2)}(nh-(n-2)h) = B_1^{(2)}(2h) \Rightarrow u = \frac{2h}{h} - 2 = 0,\quad \tfrac{1}{2}(1-u)^2\big|_{u=0} = \tfrac{1}{2}$$

$$B_n^{(2)}(nh) = B_1^{(2)}(nh-(n-1)h) = B_1^{(2)}(h) \Rightarrow u = \frac{h}{h} - 1 = 0,\quad \tfrac{1}{2} + u - u^2\big|_{u=0} = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S(nh) = C_{n-1}\cdot\tfrac{1}{2} + C_n\cdot\tfrac{1}{2}$$

סה"כ בצורה מטריצית קיבלנו מערכת של $n+2$ משוואות:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \cdots & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A=} \cdot \begin{pmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{h}{2}) \\ f(h+\frac{h}{2}) \\ \vdots \\ f(nh-\frac{h}{2}) \\ f(nh) \end{pmatrix}$$

מקדמי המטריצה [illegible]

?

ב) משום שלמערכת פתרון יחיד [illegible] טרידיאגונלית, ודומיננטית [illegible]
היא המטריצה A הפיכה ולכן $\det(A)\neq 0$ $\Leftarrow$ לפי המשפט
קיים פתרון והוא יחיד.

~~(א) חוסר נתונים $f(2h), f(h), f(0)$, ניתן להשתמש בכלל סימפסון. חוסר $x_0=0, x_1=h, x_2=2h$ - ולכן נשתמש בה עבור $g(x) = f(x)(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$ בנקודות הנתונות $0, h, 2h$.~~

שם לב שנגזרת $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})$ אינה חסומה ב-0 ולכן לא נוכל להשתמש בכלל סימפסון. בה השגיאה תלויה ב-h ה-4 נגזרת ... לא חסומה.

~~לכן נבצע אינטרפולציה ב-3 הנקודות $0, h, 2h$ ל-g המוגדרת~~ לעיל.

(4) (ג) נוכיח הוכחה כי שורשי כל פולינום מסדרת הפולינומים האורתוגונליים $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ הם פשוטים ונמצאים ב-(a,b): t_i - הנקודות בהן P_n משנה סימן

יהי P_n פולינום מסדר n, ונניח בשלילה כי יש לו $m<n$ שורשים פשוטים ב-(a,b) שהם $\{t_i\}_{i=1}^{m}$. נגדיר פולינום q_m באופן הבא: $q_m(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-t_i)$

- כלומר בעל אותם שורשים ב-(a,b) כמו P_n. ברור כי q_m ו-P_n מחליפים סימן יחד ב-(a,b) בשורשים t_i ולכן $P_n \cdot q_m$ לא מחליף סימן ב-(a,b).

אולם אז נקבל כי $\int_a^b \underbrace{P_n(x)\, q_m(x)}_{\text{לא מחליף סימן}}\, \underbrace{w(x)}_{\text{חיובית}}\, dx \neq 0$ וזו סתירה לכך שהם פולינום אורתוגונליים לכל פולינום מדרגה קטנה מ-n (כי הרי $\langle P_n, q_m\rangle_w = 0$ $\forall m<n$)

$\Leftarrow$ מכאן של-P_n $\underline{\underline{n}}$ שורשים פשוטים בקטע (a,b) - כלומר כל שורשיו של פולינום מעלה n.

הערה: השורש חייב להיות פשוט, כי אם שורש כפול: t מופיע פעמיים ...
ניתן לבחור את הבנייה של q_m ($m<n$) כמו לעיל, ולכן כל שורשי P_n פשוטים.

~~(ב) משנה קצת את הסימון ונסמן: $\int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} A_k f(x_k)$, $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$~~
~~(שים לב שהבניה היא היא גאוס שורשי פולינום אורתוגונלי ...~~
~~שנקודות ... $\int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$ ... עבור $f \in \Pi_{n-1}$~~
~~ניתן לקבל מסדרה של n משוואות (בסעיף הבא)!~~

אשנה את הסימון של הנקודות ל-$\{X_k\}_{k=0}^{n-1}$ ו- $\int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cdot f(x_k)$

ההוכחה הנדרשת בעמוד הבא

n משוו'

$$\begin{cases} \int_a^b 1\cdot dx = 1\cdot A_1 + \dots + 1\cdot A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \\ \int_a^b x\, dx = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot A_i \\ \vdots \\ \int_a^b x^{n-1} dx = \sum_{i=1}^{n} x_i^{n-1} \cdot A_i \end{cases}$$

ובצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_a^b dx \\ \int_a^b x\, dx \\ \vdots \\ \int_a^b x^{n} dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\big|_a^b \\ \frac{x^2}{2}\big|_a^b \\ \vdots \\ \frac{x^n}{n}\big|_a^b \end{pmatrix}$$

אם [illegible] $b \geq a$

(א) [illegible] f [illegible] $x_0, \dots, x_{n-1}$ [illegible]

$$f(x) \approx p_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} l_k(x) f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \cdot f(x_k)$$ — [illegible]

רוצים לחשב את $\int_a^b w(x) f(x) dx$ כאשר $w(x) > 0$ ב- $[a,b]$:

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx \approx \int_a^b w(x) \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n-1} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}}_{l_k(x)} \cdot f(x_k)\, dx =$$

$$= \int_a^b \sum_{k=0}^{n-1} w(x)\, l_k(x) \cdot f(x_k)\, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\left[\int_a^b w(x) \cdot l_k(x)\, dx \right]}_{= A_k} \cdot \underbrace{f(x_k)}_{\text{קבוע}}$$

הטענה ש- $A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$ [illegible]

[illegible] $1 \in \Pi_{n-1}$ [illegible]

[illegible] A_k [illegible]

[illegible] $l_k(x_i) = \delta_{ki}$ [illegible]

[illegible] $w > 0$ ב- $[a,b]$ [illegible]

$$A_k = \int_a^b w(x)\, l_k(x)\, dx \geq 0 \quad , \forall\ 0 \leq k \leq n-1$$

$\Leftarrow$ לא עקרוני ש- A_k יהיו חיוביים.

$l_k(x)$ משנה סימן בקטע (a,b) ולכן ההוכחה הנ"ל לא ברור.

~~(2) (א) הושג ניתוני הערכים $f(0), f(h), f(2h)$ כיוון ש- $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)$ לא~~
~~חסום בקטע $[0,2h]$ לא ניתן לבצע את השגיאה סימפסון, ולא~~
~~קיים $O(h^5)$ - ξ עבור $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)$ ב- $[0,2h]$~~

3 נקודות

(3) נשים לב כי לינארית זה קומה לשיטת הטרפז המורכבת
מופעלת על קירובים של $(f'(x))^2$ לאקווירים בקטעים $[ih,(i+1)h]$.
בגומן הזה, הקירוב שמבצעים ל- f' בנקודה ih:

$$f(x) \approx p_1(x) = f(ih) + \frac{f((i+1)h) - f(ih)}{h}(x-ih)$$

$$\begin{array}{l} ih - f(ih) \\ (i+1)h - f((i+1)h) \end{array} \quad \frac{f((i+1)h) - f(ih)}{h}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) \approx p_1'(x) = \frac{f((i+1)h) - f(ih)}{h} + \underbrace{\left(f[ih,(i+1)h,x](x-ih)(x-(i+1)h)\right)'}_{\text{השגיאה}}$$

ומכוון שסדר הקירוב h הנגזרת, לפני הגזרה הריבוע היה $O(h)$
כאשר נגזר את השגיאה הריבוע, נקבל:

$$E\Big|_{\text{קירוב}} = \underbrace{f[ih,(i+1)h,x,x]}_{\text{דיוק חסום כי } f \ldots}\cdot O(h^2) + \underbrace{f[ih,(i+1)h,x]}_{\text{גם דיוק חסום}}\cdot O(h) = O(h)$$

אלא נחשבנו נוספת אשר תהיה חסומה

$$\left[(x-ih)(x-(i+1)h)\right]' = O(h)$$

כעת אם נחבר את כל השגיאות המצטברות בשימוש בנוסחת הטרפז המורכבת
על גבי קירובי f'^2 נקבל שהשגיאה הכללית היא:

$$E = -\underbrace{(b-a)}_{=1}\cdot\frac{f''(\xi)}{12}h^2 + \left(\underset{\text{קירוב נגזרת}}{\text{שגיאת}}\right) =$$

$$= -\frac{f''(\xi)}{12}h^2 + h\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[f[(i-1)h,ih,x]\cdot(x-(i-1)h)(x-ih)\right]'^{\,2} \quad (=)$$

נפתח בנפרד את שגיאת קירוב הנגזרת:

$$\left(f[(i-1)h,ih,x](x-(i-1)h)(x-ih)\right)' = \underbrace{f[(i-1)h,ih,x,x]}_{=\frac{f'''(\xi_1)}{3!}}\cdot(x-(i-1)h)(x-ih) +$$

$$+ \underbrace{f[(i-1)h,ih,x]}_{=\frac{f''(\xi_2)}{2!}}\cdot\overbrace{(x-ih+h+x-ih)}^{2x-2ih+h}$$

$$(=) \quad \boxed{-\frac{f''(\xi_0)}{12}h^2 + h\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x-(i-1)h)(x-ih) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2x-2ih+h)\right]^2}$$

הביטוי שבריבוע באמת הוא $O(h)$, נשים לב שיש לנו סכום של $n=\frac{1}{h}$ מוכפל ב- h כך

רק בסה״כ השגיאה היא: $E = O(h^2) + O(h) = \boxed{O(h)}$

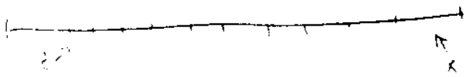
מניסוח השגיאה ...

נזכיר ש- ה-x נמצא בקטע לפי הנוסחה:

$$E \leq -\frac{f''(\xi_0)}{12}\cdot h^2 + h\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(x-(i-1)h)(x-ih) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2x-2ih+h)\right]^2 \leq$$

$$\leq -\frac{f''(\xi_0)}{12}\cdot h^2 + h\cdot\underbrace{\frac{1}{h}}_{=n}\cdot\left[\frac{f'''(\xi_1)}{3!}\cdot\underbrace{(nh)}_{=1}(n-1)h + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2\underbrace{nh}_{=2}-h)\right]^2 =$$

השגיאה הגדולה ביותר היא כש x הוא בקצה הקטע



$$= \boxed{-\frac{f''(\xi_0)}{12}\cdot h^2 + \underbrace{\left[\frac{f'''(\xi_1)}{3!}(1-h) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2-h)\right]^2}_{O(h)}}$$

כלומר השגיאה היא $O(h)$ - בהנחה ש: $f^{(k)}(\xi_k)$ רציפות וחסומות בקטע $[a,b]$.

לא לגמרי נכון

אך ניתן ניקוד מלא בגלל הבחן