מד"ר 1 – תרגיל בית 2

(1) שיטת אוילר:

(א) מצא את הקירוב ל x(t) ע"י שיטת אוילר. לחישובים השתמשו בצעד הנתון h.
(ב) אם זה אפשרי, מצא את הפתרון המדוייק והשווה עם הקירוב של אוילר בנקודה t הנתונה.

$$x' = \frac{x}{t}, x(1) = 1, t = 4, h = 0.5$$

$$x' = t^2 + x^2,\ x(0) = 0,\ t = 1,\ h = 0.2.$$

$$x' = 1 + tx^2,\ x(0) = 0,\ t = 1,\ h = 0.2.$$

(2) קירוב Picard:

ע"י שימוש בשיטת הקירוב של Picard מצא את $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ עבור בעיות ההתחלה הבאות:

$$x' = x^2 + 3t^2 - 1,\ x(1) = 1;$$

$$x' = x + e^{x-1},\ x(0) = 1$$

$$x' = 1 + t\sin x,\ x(\pi) = 2\pi.$$

(3) פתרון מד"ר ע"י טורים סביב נקודה רגולרית

(A) מצא את y(x) ע"י טור חזקות:

$$y'' = xy,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

$$y'' + xy' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

$$y'' + \frac{2}{3}y' + y = 0,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

(B) מצא את פיתוח y(x) עד סדר 4:

$$y' = x^2 + y^2,\ y(0) = 1.$$

$$y'' = e^y + x,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

$$y'' = yy' - x^2,\ \ y(0) = y'(0) = 1.$$

<u>(4) פתרון מד"ר ע"י טורים סביב נקודה סינגולרית רגילה</u>

עבור המשוואות הבאות הראה כי הנקודה $x_0 = 0$ היא נקודה סינגולרית רגילה ופתור את המד"ר ע"י טור חזקות.

$$2xy'' + y' + xy = 0.$$

$$3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0.$$

$$x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0.$$

<u>פתרון:</u>

(2)

$$\frac{1}{7}t^7 + t^3 - t + \frac{8}{7}$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) + t + t^2.$$

$$\varphi_2(t) = 2\pi + t + t\cos t - \sin t.$$

(A3)

$$Answer:\ y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot (3n-1)\cdot 3n}.$$

$$Answer:\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}.$$

$$\textit{Answer:}\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

$$\textit{Answer:}\ \ y(x)=\frac{\sin x}{x}.$$

(B3)

$$\textit{Answer:}\ 1+x+x^2+\frac{4x^3}{3}+\cdots.$$

$$\textit{Answer:}\ 1+\frac{ex^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\cdots.$$

$$\textit{Answer:}\ 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{2x^3}{3!}+\frac{3x^4}{4!}+\quad\frac{14x^5}{5!}+\cdots.$$

(4)

$$F(r)=r(2r-1);\ a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+r)(2(n+r)-1)};$$

$$F(r)=r(3r-1);\ a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+r)(3(n+r)-1)}$$

$$F(r)=r^2-2;\ a_n=-\frac{a_{n-1}}{(n+r)^2-2};$$