**מד"ר 1 / תרגיל בית 2#**

אריאל סטולרמן

**שיטת אוילר**:

1. $x' = \frac{x}{t}, x(1) = 1, t = 4, h = \frac{1}{2}$:

א) מתקיים כי $f(t,x) = \frac{x}{t}$, $x_0 = 1$, $t_0 = 1$. נסמן $t_i = 1 + 0.5i$ עבור $0 \le i \le 6$ (כאשר $t_6 = 1 + 0.5 \cdot 6 = 4 = t$).

*i.* $(t_0, x_0) = (1,1) \Rightarrow m_0 = f(1,1) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \quad x - 1 = 1 \cdot (t-1) \Rightarrow x = t \Rightarrow (t_1, x_1) = (1.5, 1.5)$

*ii.* $m_1 = f(1.5, 1.5) = 1 \Rightarrow \quad x - 1.5 = 1 \cdot (t - 1.5) \Rightarrow x = t \Rightarrow (t_2, x_2) = (2,2)$

*iii.* …

משוואת הישר המתקבלת בכל שלב הינה קבועה: $x = t$, ולפיכך בנקודה $t = 4$ נקבל $x(4) = 4$.

ב) הפתרון המדוייק למד"ר:

$$x' = \frac{t}{x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \Rightarrow \int x dx = \int t dt \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{c}{2} \Rightarrow x = \sqrt{t^2 + c}; \quad x(1) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{1 + c} \Rightarrow c = 0 \Rightarrow x = t$$

פתרון זה זהה לפתרון המקורב לפי שיטת אוילר, וגם כאן $x(4) = 4$.

2. $x' = t^2 + x^2, x(0) = 0, t = 1, h = 0.2$:

א) מתקיים $f(t,x) = t^2 + x^2$, $x_0 = 0$, $t_0 = 0$. נסמן $t_i = 0.2i$ כאשר $0 \le i \le 5$ ($t_5 = 0.2 \cdot 5 = 1 = t$).

*i.* $(t_0, x_0) = (0,0) \Rightarrow m_0 = f(0,0) = 0 \Rightarrow \quad x - 0 = 0 \cdot (t - 0) \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow (t_1, x_1) = (0.2, 0) \Rightarrow$

*ii.* $m_1 = f(0.2, 0) = 0.2^2 = 0.04 \Rightarrow \quad x - 0 = 0.04 \cdot (t - 0.2) \Rightarrow x = 0.04t - 0.008 \Rightarrow (t_2, x_2) = (0.4, 0.008) \Rightarrow$

*iii.* $m_2 = f(0.4, 0.008) \cong 0.16 \Rightarrow \quad x - 0.008 = 0.16(t - 0.4) \Rightarrow x = 0.16t - 0.056 \Rightarrow (t_3, x_3) = (0.6, 0.04) \Rightarrow$

*iv.* $m_3 = f(0.6, 0.04) \cong 0.3616 \Rightarrow \quad x - 0.04 = 0.3616(t - 0.6) \Rightarrow x = 0.3616t - 0.1769 \Rightarrow (t_4, x_4) = (0.8, 0.1123) \Rightarrow$

*v.* $m_4 = f(0.8, 0.1123) \cong 0.6526 \Rightarrow \quad x - 0.1123 = 0.6526(t - 0.8) \Rightarrow x = 0.6526t - 0.4097 \Rightarrow (t_5, x_5) = (1, 0.2428) \Rightarrow$

ומכאן שהקירוב בנקודה $t = 1$ הוא $0.2428$~.

3. $x' = 1 + tx^2, x(0) = 0, t = 1, h = 0.2$:

א) מתקיים $f(t,x) = 1 + tx^2$, $x_0 = 0$, $t_0 = 0$. נסמן $t_i = 0.2i$ כאשר $0 \le i \le 5$ ($t_5 = 0.2 \cdot 5 = 1 = t$).

*i.* $(t_0, x_0) = (0,0) \Rightarrow m_0 = f(0,0) = 1 \Rightarrow \quad x - 0 = 1 \cdot (t - 0) \Rightarrow x = t \Rightarrow (t_1, x_1) = (0.2, 0.2) \Rightarrow$

*ii.* $m_1 = f(0.2, 0.2) = 1 + 0.2^3 = 1.008 \Rightarrow \quad x - 0.2 = 1.008(t - 0.2) \Rightarrow x = 1.008t - 1.6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow (t_2, x_2) = (0.4, 0.4016) \Rightarrow$

*iii.* $m_2 = f(0.4, 0.4016) \cong 1.0645 \Rightarrow \quad x - 0.4016 = 1.0645(t - 0.4) \Rightarrow x = 1.0645t - 0.0242 \Rightarrow (t_3, x_3) = (0.6, 0.6145) \Rightarrow$

*iv.* $m_3 = f(0.6, 0.6145) \cong 1.2265 \Rightarrow \quad x - 0.6145 = 1.2265(t - 0.6) \Rightarrow x = 1.2265t - 0.1214 \Rightarrow (t_4, x_4) = (0.8, 0.8598) \Rightarrow$

*v.* $m_4 = f(0.8, 0.8598) \cong 1.5914 \Rightarrow \quad x - 0.8598 = 1.5914(t - 0.8) \Rightarrow x = 1.5914t - 0.4133 \Rightarrow (t_5, x_5) = (1, 1.1781) \Rightarrow$

ומכאן שהקירוב בנקודה $t = 1$ הוא $1.1781$~.

**קירוב *Picard***:

1. $x' = x^2 + 3t^2 - 1, x(1) = 1$:

מתקיים: $f(t,x) = x^2 + 3t^2 - 1$, $x_0 = 1$, $t_0 = 1$.

$$\varphi_0(t) = x_0 = 1$$

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_1^t f(s, \varphi_0(s)) ds = 1 + \int_1^t (1 + 3s^2 - 1) ds = 1 + \int_0^t 3s^2 ds = 1 + [t^3]_1^t = 1 + t^3 - 1 = t^3$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f\Big(s, \underbrace{\varphi_1(s)}_{=s^3}\Big) ds = 1 + \int_1^t (s^6 + 3s^2 - 1) ds = 1 + \left[\frac{1}{7}s^7 + s^3 - s\right]_1^t = 1 + \frac{1}{7}t^7 + t^3 - t - \frac{1}{7} - 1 + 1 =$$

$$\frac{1}{7}t^7 + t^3 - t + \frac{6}{7}$$

2. $x' = x + e^{x-1}, x(0) = 1$:

מתקיים: $f(t,x) = x + e^{x-1}$, $t_0 = 0, x_0 = 1$.

$$\varphi_0(t) = x_0 = 1$$

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t f(s,1)ds = 1 + \int_0^t (1 + e^0)ds = 1 + 2t$$

$$\varphi_2(t) = 1 + \int_0^t f(s,1+2s)ds = 1 + \int_0^t (1 + 2s + e^{2s})ds = 1 + t + t^2 + \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1) + t + t^2$$

3. $x' = 1 + tsinx, x(\pi) = 2\pi$:

מתקיים: $f(t,x) = 1 + tsinx$, $t_0 = \pi, x_0 = 2\pi$.

$$\varphi_0(t) = x_0 = 2\pi$$

$$\varphi_1(t) = 2\pi + \int_\pi^t f(s,2\pi)ds = 2\pi + \int_\pi^t (1 + s \cdot sin(2\pi))ds = 2\pi + \int_\pi^t ds = 2\pi + t - \pi = t + \pi$$

$$\varphi_2(t) = 2\pi + \int_\pi^t f(s,s+\pi)ds = 2\pi + \int_\pi^t (1 + s \cdot sin(s+\pi))ds = 2\pi + \int_\pi^t (1 - s \cdot sin\, s)ds = 2\pi + [s + s \cdot cos\, s - sin\, s]_\pi^t =$$

$$\int xsinxds = \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow d' = 1 \\ v' = sinx \Rightarrow v = -cosx \end{bmatrix} = -xcosx - \int(-cosx)ds = -xcosx + sinx$$

$$= 2\pi + t + tcost - sint - \pi - \pi cos\pi + sin\pi = 2\pi + t(1 + cost) - sint - \pi + \pi + 0 = 2\pi + t(1 + cost) - sint$$

**<u>פתרון מד"ר ע"י טורים סביב נקודה רגולרית</u>**:

<u>מציאת $y(x)$ ע"י טורי חזקות</u>:

1. $y'' = xy, y(0) = 1, y'(0) = 0$: פיתוח סביב $x_0 = 0$

ננחש פתרון: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ כאשר מהנתונים נובע: $c_0 = 1, c_1 = 0$. מתקיים: $y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2}$. נציב:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} = x\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1}x^k = 0 \Rightarrow$$

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1}]x^k = 0$$

השוואת מקדמי פולינום:

$$c_2 = 0, \qquad (k+2)(k+1)c_{k+2} - c_{k-1} \Rightarrow c_{k+2} = \frac{c_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \Rightarrow solution: \begin{cases} c_{k+3} = \dfrac{c_k}{(k+3)(k+2)} \\ c_0 = 1, c_1 = 0, c_2 = 0 \end{cases}$$

כיוון ש-$c_{k+3}$ תלוי ב-$c_k$ ו-$c_1 = c_2 = 0$, נשאר עם מקדמים מהצורה $c_{3k}$ בלבד:

$$k = 0:\ \ c_3 = \frac{c_0}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 3}; \quad k = 3:\ \ c_6 = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \ldots \Rightarrow c_{3k} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (3k-1) \cdot 3k} \Rightarrow$$

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (3k-1) \cdot 3k} x^{3k}$$

2. $y'' + xy' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$:

מתקיים: $x_0 = 0$ ו-$c_0 = 0, c_1 = 1$.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-2} + x\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k =$$

$$2c_2 + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2} + (k+1)c_k]x^k = 0 \Rightarrow \quad 2c_2 + c_0 = 2c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0;$$

$(k+2)(k+1)c_{k+2}+(k+1)c_k=0 \Rightarrow \begin{cases} c_{k+2}=-\frac{c_k}{k+2} \\ c_0=0, c_1=1, c_2=0 \end{cases}$ כיוון ש-$c_{k+2}$ תלוי רק ב-$c_k$ ו-$c_0=0$, נשאר עם מקדמים מהצורה $c_{2k+1} \Rightarrow$

$$c_1=1=\frac{1}{1};\quad k=1: c_3=-\frac{c_1}{3}=-\frac{1}{1\cdot 3};\quad k=3: c_5=-\frac{c_3}{5}=\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\dots \Rightarrow y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!!}x^{2k+1}$$

3. $(1+x^2)y''+2xy'=0, y(0)=0, y'(0)=1$:

מתקיים: $x_0=0, c_0=0, c_1=1$.

$$(1+x^2)y''+2xy'=(1+x^2)\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+2x\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^{k-1}=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^{k-2}+\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k+2\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^k=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k+\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)c_kx^k}_{\text{ניתן לראות מיד שווין ל-}k=0}+\underbrace{2\sum_{k=1}^{\infty}kc_kx^k}_{\text{ניתן לראות מיד שווין ל-}k=0}=\sum_{k=0}^{\infty}[(k+2)(k+1)c_{k+2}+k(k-1)c_k+2kc_k]x^k=0\Rightarrow$$

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}+k(k-1)c_k+2kc_k=0\Rightarrow\begin{cases}c_{k+2}=-\frac{k(k-1)+2k}{(k+2)(k+1)}c_k=-\frac{k}{k+2}c_k\Rightarrow\\ c_0=0, c_1=1\end{cases}$$

כיוון ש-$c_{k+2}$ תלוי רק ב-$c_k$ ו-$c_0=0$, המקדמים מהצורה $c_{2k+1}$:

$$c_1=\mathbf{1};\quad c_3=-\frac{1}{3}c_1=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}};\quad c_5=-\frac{3}{5}c_3=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}};\quad c_7=-\frac{5}{7}c_5=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}}\Rightarrow c_k=\frac{(-1)^k}{2k+1}\Rightarrow y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$$

4. $y''+\frac{2}{3}y'+y=0, y(0)=1, y'(0)=0$:

כנראה יש טעות בשאלה. מהפתרון: $y=\frac{sinx}{x}$ נובע שנוסחת הנסיגה שאמורה להתקבל היא: $c_{k+2}=-\frac{1}{(k+2)(k+3)}c_k$, בשונה מזו שמתקבלת מהשאלה.

**<u>פתרון מד"ר ע"י טורים סביב נקודה סינגולרית רגילה</u>:** ($x_0=0$)

1. $2xy''+y'+xy=0$:

$P(x)=2x, Q(x)=1, R(x)=x\Rightarrow\quad lim_{x\to0}\,x\frac{Q(x)}{P(x)}=lim_{x\to0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2};\ lim_{x\to0}\frac{x^2R(x)}{P(x)}=lim_{x\to0}\frac{x^2}{2}=0\ \Rightarrow$ $x_0$ היא נקודה סינגולרית רגילה

$$y=(x-0)^r\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r}\Rightarrow y'=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r-1}, y''=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r-2}\Rightarrow$$

$$2xy''+y'+xy=2x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r-2}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r-1}+x\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r}=\sum_{k=0}^{\infty}2(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r-1}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(2k+2r-1)c_kx^{k+r-1}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r+1}=$$

$$\sum_{k=-1}^{\infty}(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}x^{k+r}+\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^{k+r}=r(2r-1)c_0x^{r-1}+c_0x^{r+1}+$$

$\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}+c_{k-1}]x^{k+r}\Rightarrow F(r)=r(2r-1)$ (??? - מקדם של $x^{r-1}$)

$$(k+r+1)(2k+2r+1)c_{k+1}+c_{k-1}=0\Rightarrow c_{k+1}=-\frac{c_{k-1}}{(k+r+1)(2k+2r+1)}\Rightarrow c_k=-\frac{c_{k-2}}{(k+r)(2k+2r-1)}$$

2. $3x^2y''+2xy'+x^2y=0$:

$P(x)=3x^2, Q(x)=2x, R(x)=x^2\Rightarrow lim_{x\to0}\frac{xQ(x)}{P(x)}=lim_{x\to0}\frac{2x^2}{3x^2}=\frac{2}{3};\ lim_{x\to0}\frac{x^2R(x)}{P(x)}=lim_{x\to0}\frac{x^4}{3x^2}=0\Rightarrow$ $x_0$ נק' סינגולרית רגילה

$$3x^2y''+2xy'+x^2y=3x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r-2}+2x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r-1}+x^2\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}3(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}2(k+r)c_kx^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r+2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(3k+3r-1)c_kx^{k+r}+\sum_{k=2}^{\infty}c_{k-2}x^{k+r}=$$

$$(3r^2-r)c_0x^r+(r+1)(3r+2)c_1x^{r+1}+\sum_{k=2}^{\infty}[(k+r)(3k+3r-1)c_k+c_{k-2}]x^{k+r}=0\Rightarrow F(r)=3r^2-r=r(3r-1)$$

$$(k+r)(3k+3r-1)c_k+c_{k-2}=0\Rightarrow c_k=-\frac{c_{k-2}}{(k+r)(3k+3r-1)}$$

3. $x^2y''+xy'+(x-2)y=0$ :

$P(x)=x^2, Q(x)=x, R(x)=x-2\Rightarrow lim_{x\to x_0}\,x\cdot\frac{x}{x^2}=1;\ lim_{x\to x_0}\,x^2\cdot\frac{x-2}{x^2}=-2\Rightarrow$ $x_0$ היא נקודה סינגולרית רגילה

$$x^2\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r-2}+x\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r-1}+(x-2)\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)(k+r-1)c_kx^{k+r}+$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_kx^{k+r}+\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^{k+r+1}-\sum_{k=0}^{\infty}2c_kx^{k+r}=\sum_{k=0}^{\infty}[(k+r)(k+r-1)c_k+(k+r)c_k-2c_k]x^{k+r}+\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1}x^{k+r}=$$

$$[r\cdot(r-1)+r-2]c_0x^{k+r}+\sum_{k=1}^{\infty}[((k+r)^2-2)c_k+c_{k-1}]x^{k+r}\Rightarrow F(r)=r^2-r+r-2=r^2-2$$

$$((k+r)^2-2)c_k+c_{k-1}=0\Rightarrow c_k=-\frac{c_{k-1}}{(k+r)^2-2}$$