

מד"ר 1 – תרגיל בית 5

1. הוכח את התכונות הבאות של נגזרות לי. כאן f, g פונקציות חלקות ו- u, v שדות וקטורים חלקים.

$$L_v(f + g) = L_v f + L_v g; \quad .a$$

$$L_v(fg) = f L_v g + g L_v f; \quad .b$$

$$L_{u+v} = L_u + L_v; \quad .c$$

$$L_{fv} = f L_v. \quad .d$$

2. מצא דוגמא נגדית לשוויון הבא:

$$L_u L_v = L_v L_u.$$

3. נתונה מערכת משוואות מסדר ראשון. הוכח כי קבוצת האינטגרלים הראשונים עבור המערכת יוצרת חוג (ולכן אלגברה מעל $\mathbb{R}$) (כלומר, הסכום והמכפלה של אינטגרלים ראשונים הינם אינטגרלים ראשונים)

4. בהמשך לתרגיל מההרצאה: השלם את האינטגרציה של משוואת ניוטון

$$\ddot{x} + x = 0$$

(א) עם תנאי התחלה $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$

(ב) עם תנאי התחלה $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$, כאשר x_0, v_0 קבועים כלשהם.

5. עבור המטריצות הבאות, חשב את המטריצה e^{At} :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .a$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad .b$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .c$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .d$$

6. מצא את e^{At} עבור האופרטורים האלכסוניים הבאים:
הדרכה: כפי שראינו בכיתה, יש לעבור ראשית לבסיס העצמי, כלומר לבסיס בו
המטריצה A אלכסונית.

a. $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -10 & 14 \end{pmatrix}$

b. $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

7. מצא את קבוצת הפתרון הבסיסית עבור המערכות הבאות:
a.

$$\begin{cases} x'_1 &= 4x_1 - 3x_2 \\ x'_2 &= 8x_1 - 6x_2 \end{cases} \quad .b$$

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 &= 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x'_3 &= -8x_1 - 5x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad .c$$

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 - 5x_2 \\ x'_2 &= x_1 - 3x_2 \end{cases} \quad .d$$

$$\begin{cases} x'_1 &= 4x_1 - 2x_2 \\ x'_2 &= 8x_1 - 4x_2 \end{cases} \quad .e$$

$$\begin{cases} x'_1 &= x_1 + x_2 + x_3 \\ x'_2 &= 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x'_3 &= -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

פתרונות:

שאלה 5:

c. $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$

f. $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

שאלה 6:

a. $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{9t} + 2e^{4t} & e^{9t} - e^{4t} \\ 2e^{9t} - 2e^{4t} & 2e^{9t} + e^{4t} \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -3e^t + 4e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ e^t - e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} & 6e^t - 5e^{2t} \end{pmatrix}$

שאלה 7:

a.

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

b.

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

c.

$$x(t) = \left(k_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-t} \cos t + \left(k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) e^{-t} \sin t$$

.d

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} t \right)$$

.e

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} t \right) e^{2t} + c_3 \left(\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t^2 \right) e^{2t}$$