סיכומים במד"ר 1

סמסטר קיץ 2009 (פרופ' ודים אוסטפנקו)

סיכומי תרגולים:

תרגול 1:

סוגים של מד"ר ודרכי פתרון:

חשוב: לשים לב לקבוע c המצורף כתוצאה מאינטגרציה.

שיטה	צורה	דרך פתרון
הפרדת משתנים	$y' = g(x) \cdot h(y)$	פתרון ע"י העברת אגפים ואינטגרציה לפי כל משתנה בנפרד: $\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx$.
משוואות הומוגניות	משוואות המקיימות: $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$	ניתן להציג בצורה $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$. נסמן $u = \frac{y}{x}$ ונקבל משוואה מהצורה לעיל (הפרדת משתנים).
משוואות לינאריות (מסדר 1)	$y' + p(x) \cdot y = q(x)$ כאשר $q \equiv 0$ המשוואה **הומוגנית**	• מציבים $z(x) = y \cdot e^{\int p(x)dx}$. • מחשבים את z': $z'(x) = y' \cdot e^{\int p(x)dx} + y \cdot \left(e^{\int p(x)dx}\right)'$. • מבודדים מתוך האגף הימני את $y' + p(x) \cdot y$ ומציבים במקום זה את $q(x)$. מתקבל ביטוי של $z'(x)$ כפונקציה של x בלבד. • מבצעים אינטגרציה על מה שהתקבל ומשווים להצבה המקורית של z, ממנה מבודדים את y.
משוואות ברנולי	$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$	• כותבים את המשוואה בצורה: $y^{-n} \cdot y' + p(x) \cdot y^{1-n} = q(x)$. • מסמנים $z = y^{1-n}$ ולכן $z' = (1-n)y^{-n}y'$. • מציבים במשוואה ומקבלים משוואה לינארית: $\frac{z'}{1-n} + p(x) \cdot z = q(x)$ או: $z' + \underbrace{(1-n)p(x)}_{p_{new}} z = \underbrace{(1-n)q(x)}_{q_{new}}$ • מוצאים את z וממנו מוצאים את y.
משוואות מדוייקות	$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$	• אם $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ אזי המשוואה מדוייקת, ואין צורך במציאת גורם אינטגרציה. • הפתרון הוא מהצורה: $u(x,y) = c$ המקיים: $u(x,y) = \int M(x,y)dx + \psi(y)$. • כדי למצוא את $\psi(y)$: מתקיים $u_y = N(x,y)$ ולכן $N(x,y) = \frac{d(\int M(x,y)dx)}{dy} + \psi'(y)$. מחשבים את $\psi'(y)$ וע"י אינטגרציה מחשבים את $\psi(y)$. • לבסוף מקבלים את u ורק אז מוסיפים את הקבוע: $u(x,y) = c$. <u>מציאת גורם אינטגרציה</u>: • כאשר לא מתקיים התנאי הראשון, ניתן להגיע למשוואה מדוייקת ע"י הכפלה בגורם אינטגרציה שנסמנו $\mu(x,y)$. o אם $\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)$ (פונ' של x בלבד) אז: $\mu(x,y) = e^{\int p(x)dx}$. o אם $\frac{N_x - M_y}{M} = q(y)$ אז: $\mu(x,y) = e^{\int q(y)dy}$. • המשוואה $\underbrace{\mu \cdot M}_{M_{new}} dx + \underbrace{\mu \cdot N}_{N_{new}} dy = 0$ מדוייקת

תרגולים 2,3:

קירובים:

שיטת (קירוב) אויילר:

בהינתן מד״ר $y' = f(x,y)$ ותנאי התחלה $y(x_0) = y_0$ השיטה מסתמכת על חישוב פוני האינטגרל של y על אינטרוולים קטנים. הנוסחה:

$\begin{cases} y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \\ x_k = x_0 + h \cdot k, k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$ כאשר h הוא אורך האינטרוול.

תיאור השיטה: (על קטע $[x_0, x]$)

- מחלקים את הקטע ל-n חלקים שווים באורך h: $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, \underbrace{x_n}_{=x}]$.
- בקטע $[x_0, x_1]$ מוצאים את הישר העובר דרך (x_0, y_0) ששיפועו $f(x_0, y_0)$. נקודת החיתוך שלו עם הישר x_1 היא הנק׳ הבאה, (x_1, y_1).
- מחברים בין הנקודות $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$. ממשיכים כך עד הקטע האחרון.

מתקבל גרף פוני מקורב לפתרון. תזכורת: משוואת ישר היא $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$.

קירוב פיקרד:

בהינתן מד״ר $\dot{x}(t) = f(t,x)$ עם תנאי התחלה $x(t_0) = x_0$, הקירוב הוא ע״י סדרת פוני $\{\varphi_k\}$ כאשר: $\begin{cases} \varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, \varphi_n(s)]ds \\ \varphi_0 \equiv x_0 \end{cases}$

קיום ויחידות:

בהינתן $\dot{x} = f(t,x)$:

- אם f רציפה אז קיים פתרון, לא בהכרח יחיד. דוגמא: $\dot{x} = x^{\frac{2}{3}}$.
- אם f גם גזירה אז הפתרון הוא יחיד.

$\Leftarrow$ כדי למצוא את תחומי הפאזה (של x, t) בהם יש למד״ר פתרון יחיד, נמצא את התחומים בהם f גזירה ורציפה.

פתרון מד״ר ע״י טורי חזקות:

בהינתן מד״ר $y = f(x,y)$:

- מסמנים פתרון כללי בצורת טור חזקות: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$. מכך מתקבל: $y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1}, y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k (x - x_0)^{k-2}$ וכו׳.

לשים לב מהיכן מתחיל k בטורים – במקרה זה 0 עבור y, 1 עבור y' וכו׳!

תנאי התחלה יקבעו את תחילת הסדרה $\{c_k\}$: $y(x_0) = y_0$ יקבע את $c_0 = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ יקבע את $c_1 = y_1$ וכן הלאה.

- מציבים את הטורים הנ״ל במד״ר.
- מבצעים השוואת מקדמי פולינום לכל חזקה $(x - x_0)^k$ – מערכת משוואות אינסופית. מפתרונה נקבל פתרון לכל המקדמים: ע״י תנאי ההתחלה ונוסחת הנסיגה נוכל להגיע לפתרון כללי עבור c_k, ומכאן לפתרון המד״ר.
- מציאת רדיוס ההתכנסות: $R = \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| lim_{n \to \infty}$.

פתרון ע״י טורים עד סדר כלשהו:

- מייצגים את y עד הסדר הרצוי, למשל: $y(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$.
- את y', y'' מחשבים בהתאם: $y'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3$, $y''(x) = 2c_2 + 6c_3 x + 12 c_4 x^2$.
- בהצבה במד״ר נסתכל על הגורמים עד הסדר הגבוה ביותר המופיע ב-$y^{(k)}$, הנגזרת הגבוהה ביותר המופיע במד״ר (לרוב y''). למשל בדוגמא לעיל נסתכל רק על גורמים עד סדר 2. מכל שאר הגורמים נתעלם. פתרון סופי מתקבל ע״י השוואת מקדמי פולינום.

נקודות סינגולריות רגילות:

במשוואות מהצורה $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, x_0 היא נקודה סינגולרית רגילה אם: $lim_{x \to x_0}(x - x_0) \cdot \frac{Q(x)}{P(x)}, lim_{x \to x_0}(x - x_0) \cdot \frac{R(x)}{Q(x)}$ הם גבולות סופיים. אם כן, ניתן לפתור את המד״ר באופן הבא:

- מציבים $y(x) = (x - x_0)^r \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$ כלומר $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^{k+r}$.

- כמו קודם גוזרים ומציבים את הטורים במד"ר, ומתקבל שהמקדם של c_0 הוא הפולינום האינדיציאלי שהוא ריבועי ב-r. נסמנו $F(r)$.

לשים לב שכאן הטורים של y', y'' מתחילים גם כן מ-$k=0$! ($y'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+r)c_k(x-x_0)^{k+r-1}$ וכו')

<u>מקרה ספציפי</u>: אם ל-$F(r)$ שני שורשים ממשיים שונים שההפרש ביניהם לא שלם, יתקבלו הפתרונות: $y_1(x)=(x-x_0)^{r_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k$, $y_2(x)=(x-x_0)^{r_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(x-x_0)^k$, והפתרון הכללי הוא: $y(x)=c_1\cdot y_1+c_2\cdot y_2$ עבור c_1,c_2 קבועים כלשהם (את a_k,b_k מוצאים ע"י נוסחת הנסיגה המתאימה לשורשים שמצאנו).

<u>תרגול 4</u>:

<u>דיוקן פאזה של מערכת אוטונומית</u>:

<u>מערכת אוטונומית</u>: מערכת משוואות דיפרנציאליות שאגף ימין שלה אינו תלוי ב-t, למשל: $\dot{x}=F(x)$ ($n=1$); $\ddot{x}=F(x,\dot{x})$ ($n=2$) וכו'.

טענה: אם $x(t)$ פתרון למערכת אוטונומית אזי גם $x(t+\alpha)$ פתרון (אם $sin\ t$ פתרון, גם $cos\ t$ פתרון).

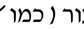
<u>קו פאזה</u>: קו שהפתרון $x(t)$ של המערכת $\dot{x}=F(x)$ מצייר במרחב $\mathbb{R}^n$. **נשים לב**: שני קווי פאזה או לא נחתכים, או מתלכדים.

<u>עקומת פאזה עבור משוואות ניוטון</u>:

החוק השני של ניוטון: $\ddot{x}+f(x)=0$ (משוואה אוטונומית); מכאן: $\dot{x}\ddot{x}-\dot{x}f(x)=0$. נסמן $u'(x)=f(x)$:

<u>האינטגרל הראשון</u>: $\frac{\dot{x}^2}{2}+u(x)=E$ - הגורם השמאלי הוא האנרגיה הקינטית והימני הוא הפוטנציאלית.

<u>שרטוט קווי פאזה</u>:

- עוברים למערכת משוואות מסדר ראשון: $\ddot{x}+g(x',x)$ לאחר סימון $y=\dot{x}$ הופך למערכת המשוואות: $\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-g(x',x)\end{cases}$. מכאן מתקבל השדה הוקטורי: $F(x,y)=\big(y,-g(x',x)\big)$.
- מחשבים אינטגרל ראשון $u(x)$: $u'(x)=g(x',x)$ ואינטגרציה על גורם זה תתן את התוצאה.
- מוצאים נקודות קריטיות ע"י השוואה ל-0: $F(x,y)=(0,0)$.
- עבור נקודות קריטיות (a,b) שהתקבלו, הנקודות הקריטיות של $u(x)$ הם $\big(a,u(a)\big)$.
- מחשבים נגזרת שניה של $u(x)$ כדי לזהות מינימום/מקסימום.
- משרטטים את גרף $u(x)$, ועליו משרטטים את כל קווי הגובה (שהם האנרגיה <u>הכוללת</u> $E\geq u(x)$) האפשריים בהתאמה למקרים השונים.
- ניתן לדמות את גרף הפוני' כמסילה עליה נוסע כדור. תיאור מהירותו ותנועתו על גרף הפוני' מתאימה לקווי הפאזה שנשרטט. משרטטים על גרף מישור הפאזה את קווי הפאזה המתאימים לכל אחד מהמקרים השונים של E בהתאם לעקרונות הבאים:
  - כיוון ש-$E\geq u(x)$ אז במקומות בהם $E<u(x)$ (קווי גובה קטנים מהפוני') אין קווי פאזה.
  - במקומות בהם יש חיתוך עם נק' קיצון, תהיה במישור הפאזה נקודה סינגולרית בודדת (הכדור עומד במקומו).
  - במקומות בהם יש חיתוך חלק קעור (כמו  למשל), יש תנועה מחזורית עם מהירות 0 בקצוות ושיא בקיצון (ככל שהאנרגיה הפוטנציאלית-גובהית גדולה יותר, כך הקינטית קטנה יותר ולהיפך). במקרה זה קווי הפאזה מהצורה .
  - סימטריה ביחס לציר ה-x.

משוואות מהצורה $\ddot{x}+a\dot{x}+b=0$:

- נסמן $y=\frac{dx}{dt}=\dot{x}$ ומכאן: $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y\cdot\frac{dy}{dx}=\ddot{x}=-a\dot{x}-bx=-ay-bx$.
- מכאן: $F(x,y)=(y,-ay-bx)$ הוא השדה הוקטורי.

<u>תרגול 5</u>:

<u>נגזרות *Lie* ואינטגרל ראשון</u>:

יהי v וקטור היוצא מנק' x בתחום U, $f:U\to\mathbb{R}$ ו-$\varphi:I\to U$ עקומה פרמטרית המשאירה את x עם מהירות v כך ש-$\varphi(0)=x,\dot{\varphi}(0)=v$. ניתן להגדיר את ההרכבה $f\circ\varphi:I\to\mathbb{R}$.

<u>נגזרת כיוונית</u>: הנגזרת של פונ' f בכיוון הוקטור v הוא: $L_v f := \frac{d}{dt} f \circ \varphi|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i$.

יהי V שדה וקטורי ו-$f: U \to \mathbb{R}$, אז:

<u>נגזרת Lie של f</u>: הנגזרת של הפונ' f בכיוון השדה V הוא פונ' חדשה $L_V f: U \to \mathbb{R}$ שבכל נקודה x הערך שלה הוא הנגזרת של f בכיוון וקטור השדה היוצא מ-x: $(L_V f)(x) = L_{V(x)} f$. הפונקציה $L_V f$ היא נגזרת Lie של f.

<u>האינטגרל הראשון (הגדרה פורמלית)</u>: יהי V שדה וקטורי, $f: U \to \mathbb{R}$ דיפרנציאבילית. f היא אינטגרל ראשון של המשוואה $\dot{x} = V(x)$ אם מתקיים $L_V f = 0$. הגדרה שקולה קלה יותר לבדיקה: f אינטגרל ראשון אם היא קבועה לאורך כל פתרון $\varphi: I \to U$, כלומר על $f \circ \varphi$ היא קבועה.

<u>מערכת משוואות לינאריות</u>:

יהי $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ אופרטור לינארי, ומערכת n משוואות לינאריות הומוגניות מסדר 1 עם מקדמים קבועים (בקיצור משוואה לינארית). המשוואה הלינארית מוגדרת ע"י השדה הוקטורי $V(x) = Ax$ והיא מהצורה: $\dot{x} = Ax$.

עבור סימון קורדינטות $x = (x_1, \dots, x_n)$ ניתן לכתוב את המשוואה בצורת מערכת משוואות: $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ לכל $1 \le i \le n$, כאשר (a_{ij}) המטריצה המייצגת של האופרטור A. מט' זו היא <u>המטריצה המייצגת</u> של המערכת.

פתרון מערכת מצורה זו:

עבור תנאי התחלה $\varphi(0) = x_0$ פתרון יהיה: $\varphi(t) = e^{At} \cdot x_0$.

<u>אקספוננט של אופרטור לינארי</u>: $e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, כאשר E מט'/אופרטור יחידה. e^A הינו גם כן אופרטור לינארי.

- אם המטריצה של האופרטור הלינארי אלכסונית עם איברי אלכסון $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ אז גם המט' של האופרטור e^A אלכסונית עם $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ באלכסון.
- אופרטור A <u>ניתן ללכסון</u> אם המט' שלו ניתנת ללכסון (אלכסונית בבסיס כלשהו).
- תהי P המט' המלכסנת של A כך ש-$A = P^{-1}DP$ (D אלכסונית), אזי: $e^{At} = P^{-1} e^{Dt} P$.

מציאת e^{At}:

תחילה מלכסנים את A:

- מוצאים פולינום אופייני $p(\lambda) = det\,(A - \lambda E)$ ואת שורשיו שהם הע"ע של A: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
- לכל ע"ע λ_k נמצא ו"ע מתאים ע"י דירוג המטריצה $\lambda_k E - A$ והשוואתה ל-0. מכאן נוציא את הו"ע (יתכנו יותר מאחד).
- כעת המטריצה המלכסנת P היא מהצורה: $\begin{pmatrix} | & \dots & | \\ v_1 & \dots & v_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$ ו-$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ (v_i הו"ע המתאים ל-λ_i). מחשבים את P^{-1} (למשל בשיטת דירוג לצד מטריצת היחידה).
- שלב סופי: $e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1}$.

במקרים אחרים ניתן להסתכל על טור החזקות $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ ולנסות למצוא חוקיות לחזקות של A.

<u>אופרטור נילפוטנטי</u>: אם עבור (החל מ) חזקה כלשהי הוא מתאפס. אם A נילפוטנטי אז הסדרה e^A סופית.

<u>תכונות אקספוננט</u>:

- לינאריות: $e^{A(t+s)} = e^{At} \cdot e^{As}$.
- דיפרנציאביליות: $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$.

מסקנה (משפט): פתרון המשוואה הלינארית $\dot{x} = Ax$ עם תנאי התחלה $\varphi(0) = x_0$ הוא $\varphi(t) = e^{At} \cdot x_0$.

<u>מציאת קבוצת פתרונות עבור מערכת משוואות</u>:

להלן תפורט קבוצת הפתרונות הבסיסית, כאשר הפתרון הכללי הוא צירוף לינארי של כולם. בהינתן מערכת המשוואות $\dot{x} = Ax$ כאשר $A \in Mat_{n \times n}$:

- אם ל-A יש n ע"ע ממשיים ושונים $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ עם ו"ע $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, קבוצת הפתרונות הבסיסית היא: $\{\varphi_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \varphi_n e^{\lambda_n t}\}$.
- כאשר לע"ע כלשהו ריבוי אלגברי גדול מ-1, נסמנו d:
  - אם מס' הו"ע המתאימים לאותו ע"ע λ (ריבוי גיאומטרי) הינו גם d, קב' הפתרונות עבור λ: $\{\varphi_1 e^{\lambda t}, \dots, \varphi_d e^{\lambda t}\}$.

- אם מס' הו"ע המתאימים ל-λ הוא $k<d$: $\{\varphi_1 e^{\lambda t},\dots,\varphi_k e^{\lambda t},(\psi_{11}+\psi_{12}t)e^{\lambda t},(\psi_{21}+\psi_{22}t+\psi_{23}t^2)e^{\lambda t},\dots,\sum_{j=1}^{d-k}\psi_{d-k,j}t^j e^{\lambda t}\}$, כאשר את ψ_{ij} מוצאים ע"י הצבה במשוואה והשוואת מקדמים, למשל עבור: $(\psi_{11}+\psi_{12}t)e^{\lambda t}$ והמשוואה $\dot{x}=Ax$, מסמנים וקטור נעלמים עבור ψ_{ij} ומציבים: $\left((\psi_{11}+\psi_{12}t)e^{\lambda t}\right)'=A\cdot(\psi_{11}+\psi_{12}t)e^{\lambda t}$. מהשוואת מקדמים נמצא את הוקטורים הנ"ל.
- אם קיים ע"ע מרוכב μ (שגם הצמוד שלו הוא ע"ע), נשתמש בנוסחת אויילר לקבלת 2 פתרונות ממשיים ב"ת: $e^{i\mu t}=\cos\mu t+i\sin\mu t$:

$$v_1e^{(\alpha+i\beta)t}=v_1e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t}=v_1e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)\Rightarrow\{v_1e^{(\alpha+i\beta)t}\}\to\{v_1e^{\alpha t}\cos\beta t,v_1e^{\alpha t}\sin\beta t\}$$

<u>תרגולים 6,7</u>:

<u>לינאריזציה</u>:

בהינתן משוואה $\dot{x}=V(x)$ המוגדרת ע"י שדה וקטורי V במרחב הפאזה, תהי x_0 נקודה קריטית המאפסת את השדה. בה"כ ניתן לקחת $x_0=\theta$ (אחרת פשוט מזיזים את מע' הקורדינטות). פיתוח השדה סביב נקודה זו לטור טיילור, כאשר הגורם הראשון בו לינארי, והשמטת שאר הגורמים נקראת <u>לינאריזציה</u>: המעבר מהמשוואה $\dot{x}=V(x)$ למערכת חדשה: $\dot{y}=Ay$ כאשר $y\in\mathbb{R}^n(or\ \mathbb{C}^n)$ ו-$A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ הוא יעקוביאן, כלומר: $a_{ij}=\frac{\partial V_i}{\partial x_j}|_{x=0}$ (נגזרת הרכיב ה-i לפי הרכיב ה-j בנקודה קריטית). באופן אחר: $\dot{y}_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}\cdot y_j$.

<u>משוואות לינאריות במקדמים קבועים</u>:

פתרון כללי של מד"ר הומוגנית מסדר 2:

לכל מד"ר לינארית הומוגנית מסדר 2 שמקדמיה רציפים באינטרוול I (לרוב קבועים) ניתן למצוא בדיוק 2 פתרונות ב"ת ב-I $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ המקיימים $c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)=0\ \forall x\in I\Leftrightarrow c_1=c_2=0$. זו <u>קבוצה יסודית/בסיסית</u> של המד"ר. פתרון כללי למד"ר: $y(x)=c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)$.

וורונסקיאן:

יהיו $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ n פתרונות של מד"ר לינארית הומוגנית בקטע I עם מקדמים רציפים (כאן: קבועים). וורונסקיאן:

$$W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t)=det\begin{pmatrix}\varphi_1(t)&\varphi_2(t)&\dots&\varphi_n(t)\\ \dot{\varphi}_1(t)&\dot{\varphi}_2(t)&\dots&\dot{\varphi}_n(t)\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(t)&\varphi_n^{(n-1)}(t)&\dots&\varphi_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$$

- הפתרונות $\varphi_1,\dots,\varphi_2$ תלויים לינארית ב-I אמ"מ $\forall t\in I: W(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t)$.
- לפיכך: בהינתן פתרונות למד"ר, ניתם לבדוק נכונות ע"י הצבה במד"ר, ואי תלות ע"י הצבה בוורונסקיאן ובדיקה שלא מתקבל 0 לכל t.

פתרון משוואות לינאריות הומוגניות במקדמים ממשיים:

בהינתן מד"ר לינארית מסדר 2 לא הומוגנית שמקדמיה קבועים וממשיים: $ay''+by'+cy=0$ ($a,b,c\in\mathbb{R}$), אזי:

- הפולינום האופייני של המד"ר: $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ (באופן דומה עבור סדר n). קבוצת הפתרונות הבסיסית נקבעת מהשורשים לפי:
  - אם λ_1,λ_2 שורשים ממשיים שונים: $\{e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x}\}$.
  - אם λ שורש ממשי יחיד: $\{e^{\lambda x},xe^{\lambda x}\}$ (בריבוי גבוה יותר: $x^2e^{\lambda x},x^3e^{\lambda x}$ וכו').
  - אם $\lambda_1=\overline{\lambda_2}$ ($\alpha\pm i\beta$) שורשים מרוכבים (צמודים אחד לשני), לפי נוסחת אויילר: $\{e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x\}$.
- הפתרון הכללי: $y=c_1y_1+c_2y_2$, c_1,c_2 נקבעים ע"פ תנאי ההתחלה.

משוואות לינאריות לא הומוגניות במקדמים קבועים:

בהינתן: - משוואה לינארית לא הומוגנית מסדר 2 $y''+ay'+by=g(x)$
- זוג פתרונות של המשוואה ההומוגנית המתאימה $y''+ay'+by=0$
- פתרון מסויים של המשוואה הלא הומוגנית, נסמנו $\tilde{y}(x)$

הפתרון הכללי של המשוואה הלא הומוגנית הוא: $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\tilde{y}(x)$.

בהינתן: - פתרון כלשהו $\tilde{y}_1(x)$ של המשוואה $y''+ay'+by=g_1(x)$
- פתרון כלשהו $\tilde{y}_2(x)$ של המשוואה $y''+ay'+by=g_2(x)$

אז עבור המשוואה $y''+ay'+by=g_1(x)+g_2(x)$ הפתרון יהיה: $\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)$.

כדי למצוא את הפתרון הפרטי הנדרש למשוואה הלא הומוגנית ע"מ שנוכל לפתור את הנ"ל, נשתמש בשיטת המקדמים הלא ידועים (כשניתן): בהינתן $y''+ay'+by=g(x)$ (מקדמים קבועים), נציב פתרון כללי לפי הצורה של $g(x)$ ונמצא אותו ע"י השוואת מקדמים:

- $g(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$ (λ_1,λ_2 שורשים של הפולינום האופייני):
  - אם $\alpha\neq\lambda_1,\lambda_2$: מחפשים פתרון מהצורה $\tilde{y}=e^{\alpha x}Q_n(x)$ כאשר Q_n פולינום ב-x מדרגת P_n.
  - אם $\alpha=\lambda_1,\alpha\neq\lambda_2$: $\tilde{y}=xe^{\alpha x}Q_n(x)$.
  - אם $\alpha=\lambda_1=\lambda_2$: $\tilde{y}=x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$.
- $g(x)=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+Q_n(x)\sin\beta x]$:
  - אם $\alpha+i\beta\neq\lambda_1,\lambda_2$: $\tilde{y}(x)=e^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]$ כאשר $l=max\{m,n\}$.
  - אם $\alpha+i\,\beta=\lambda_1\neq\lambda_2$ (מרוכבים תמיד שונים, צמודים): $\tilde{y}(x)=xe^{\alpha x}[R_l(x)\cos\beta x+S_l(x)\sin\beta x]$ (אותו תנאי על l).

יציבות:

בהינתן מד"ר הומוגנית מסדר n:

- יציבות (*stable*): אם כל פתרון $x(t)$ נשאר חסום כאשר $t\to\infty$.
- יציבות אסימפטוטית (*Strictly stable*): אם לכל פתרון של המד"ר $x(t)$ מתקיים: $x(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0$.

במקדמים קבועים נקבל רק יציבות אסימפ' או חוסר יציבות בכלל. במקדמים קבועים: יציבה אסימפטוטית אמ"מ לכל ע"ע λ מתקיים $Re(\lambda)<0$. אם $Re(\lambda)>0$ עבור ע"ע כלשהו, המע' אינה יציבה.

קריטריון יציבות של *Routh-Hurwitz*:

- אם הפולינום האופייני מהצורה: $\lambda^2+p\lambda+q$ - הקריטריון הוא: $p>0,q>0$.
- אם הפולינום האופייני מהצורה: $\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3$ - הקריטריון הוא: $a_1,a_2,a_3>0,a_3<a_1\cdot a_2$.

הגדרת יציבות עבור מע' אוטונומית כללית:

תהי a נקי' קריטית של מע' אוטונומית $\dot{x}=f(x)$ כך ש-$f(a)=0$. אזי הנקודה a:

- יציבה: *to*לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|x(0)-a|<\delta$ אז $\forall t>0:|x(t)-a|<\varepsilon$.
- יציבה אסימפטוטית: אם קיים $\delta>0$ כלשהו כך שאם $|x(0)-a|<\delta$ אז $lim_{t\to\infty}|x(t)-a|=0$.
- יציבה לחלוטין: אם היא יציבה ויציבה אסימפטוטית.

עבור מד"ר אוטונומית מסדר 1, קריטריון פשוט ליציבות אסימפטוטית:

משפט:

הנקודה הקריטית 0 של המשוואה האוטונומית מסדר 1: $\dot{x}(t)=f(t)$ יציבה אסימפטוטית אמ"מ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x|<\delta$ אז $xf(x)<0$.

משפט:

הנקודה הקריטית 0 של מע' משוואות אוטונומית לינארית במקדמים קבועים $\dot{x}(t)=Ax$ יציבה אסימפטוטית אמ"מ לכל ע"ע של A החלק הממשי שלילי. במקרה זה המערכת גם יציבה לחלוטין.

משוואה לינארית מסדר 2 $\ddot{x}+p\dot{x}+qx=0$ ניתנת לכתיבה כ-$\begin{cases}\dot{x}=ax+by\\\dot{y}=cx+dy\end{cases}$. לפי קריטריון הורוביץ התנאים ליציבות לחלוטין:

$$\begin{cases}p=-(a+d)>0\\q=ad-bc>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+d<0\\ad>bc\end{cases}$$

תנאים ליציבות מד"ר:

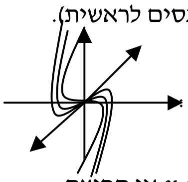
תהי משוואה לינארית הומוגנית כלשהי במקדמים קבועים מסדר n, ובה"כ יש לה k שורשים אופייניים $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ כאשר כל אחד תורם לקבוצת הפתרונות: $e^{\lambda_i t},te^{\lambda_i t},\dots$. קריטריונים ליציבות אך לא לחלוטין:

- כל השורשים מקיימים $Re(\lambda_i) \le 0$. אם כל השורשים מקיימים $Re(\lambda_i) < 0$ אז הפתרונות הללו דועכים ל-0 כאשר $t \to \infty$ והפתרון יציב לחלוטין. אם $Re(\lambda_i) > 0$ הפתרון לא יציב כלל.
- קיים לפחות אחד המקיים $Re(\lambda_i) = 0$.
- כל שורש המקיים $Re(\lambda_i) = 0$ הינו שורש פשוט (מריבוי 1).

סוגי נקודות יציבות:

בהינתן משוואה אוטונומית $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$ הפולינום האופייני הוא: $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 + p\lambda + q = 0$.

יהיו λ_1, λ_2 שורשי הפולינום, נסמן: $\Delta = p^2 - 4q = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$.

- מקרה 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0, q \neq 0, \Delta \neq 0$:
  - <u>*Focal Points*</u>: כאשר $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\Delta < 0$ ו-$\beta \neq 0$. פתרונות המערכת הם ספירלות: אם $p > 0$ הספירלות מכוונות לראשית, אם $p < 0$ הן מתרחקות מהראשית, ואם $p = 0$ אלו עקומות סגורות (כמו מעגלים).
  - <u>*Nodal Points*</u>: כאשר $q > 0, \Delta > 0$ ואז $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ממשיים בעלי אותו סימן. המערכת יציבה כאשר $\lambda_{1,2}$ שליליים. עקומת הפאזה מהצורה: $y = cx^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ - פרבולות המשיקות לראשית.
  - <u>*Saddle Points*</u>: $q < 0, \Delta > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ממשיים בעלי סימן מנוגד. עקומת הפאזה: $x^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} y = c$ - שתי אסימפטוטות והיפרבולות ביניהן. נקודות אוכף תמיד **אינן** יציבות.
- מקרה 2:
  - $\Delta > 0, q = a^2 > 0$: עקומת הפאזה מורכבת מקווים ישרים דרך הראשית (קונפיגורציית כוכב – או יוצאים מהראשית או נכנסים לראשית). יציבות: לא ברור!
  - $\Delta = 0, q = a^2$ $(p = -2a)$: נקבל גם כן *Nodal Points*. יציב כאשר $a < 0$ ולא יציב כאשר $a > 0$. עקומת הפאזה מהצורה:  כאשר החצים פונים החוצה או פנימה.
  - $\Delta \neq 0, q = 0$: עקומת הפאזה היא קווים מקבילים מהצורה $\dot{x} + px = c$ (קווים מקבילים כאשר החצים פונים לכיוון ציר ה-x או החוצה ממנו). הראשית נקודה יציבה אך לא לחלוטין אם $p > 0$, ולא יציבה כאשר $p < 0$ (בכל מקרה $p \neq 0$).
  - $\Delta = q = 0$: עבור $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$ נקבל נקודה *Neutrally Stable* (יציבה אך לא אסימפטוטית), ועבור $\ddot{x} = 0$ נקבל חוסר יציבות.

<u>**ישנו חומר נוסף שטרם נכלל בסיכום!!!**</u>

<u>סיכומי הרצאות</u>:

<u>משוואות קוואזי-לינאריות (כמעט לינאריות)</u>:

משוואות מהצורה: $M(t,x)x'+N(t,x)=0$ כלומר: $\boldsymbol{x'=f(t,x)}=-\frac{N(t,x)}{M(t,x)}$ (משוואה נורמלית).

פתרון של $x'=f(t,x)$ בתחום $[\alpha,\beta]$ הוא פונ' $x(t)$ (מפורשת או סתומה) כך ש-$\forall t\in[\alpha,\beta]: x'(t)=f\big(t,x(t)\big)$.

- האם פתרון קיים
- האם פתרון יחיד
- מהו תחום ההגדרה המקסימלי $[\alpha,\beta]$

סוגים:

(1) <u>משוואות מהצורה</u> $x'=g(t)$ תלות ב-t בלבד.

משפט *Barrow*:

תהי $g\in C[\alpha,\beta]$, $x_0\in\mathbb{R}$ אזי:

- קיים פתרון יחיד $x(t)$ למשוואה $x'=g(t)$ כך ש-$x\in C^1[\alpha,\beta]$ ו-$x(\alpha)=x_0$.
- הפתרון של $x(t)$ הוא פונ' הנתונה ע"י הנוסחה: $x(t)=x_0+\int_\alpha^t g(\tau)d\tau$. כל העקומים נמצאים ברצועה בין $x=\alpha, x=\beta$ ובכל נקודה עובר עקום יחיד בתנאי שהפונ' רציפה.

(2) <u>משוואות מהצורה</u> $x'=h(x)$ (תלות ב-x בלבד, ללא תלות ב-t.

<u>פתרון</u>: $x'=\frac{dx}{dt}=h(x)\Rightarrow\frac{1}{h(x)}dx=dt\Rightarrow\int\frac{dx}{h(x)}=\int dt=t$.

<u>הערה</u>: $h(x)$ אינווריאנטית ביחס ל-t, כלומר עבור $t+s$ נקבל אותו דבר. מכאן: אם $x(t)$ פתרון אז גם $x(t+s)$.

(3) <u>משוואות לינאריות מסדר 1</u>: $A(t)x'+B(t)x+C(t)=0$, $A,B,C\in C[\alpha,\beta]$.

אם ב-$[\alpha,\beta]$ מתקיים $A(t)\neq 0$ אז מתקבלת משוואה נורמלית: $x'=p(t)x+q(t)$, $p,q\in C[\alpha,\beta]$.

<u>משוואות הומוגניות</u>: מקרה פרטי בו $q=0$, כלומר: $x'=p(t)x$. שיטת פתרון: $(\ln x)'=\frac{x'}{x}=p(t)$ ולכן $\ln x=\int p(t)dt$. פתרון כללי: $x(t)=e^{\int p(t)dt}$.

הפרדת משתנים: מפורט בתרגול.

פונקציות הומוגניות: $f(t,x)$ פונקציה הומוגנית (מסדר 0) אם $\forall\lambda,t,x: f(\lambda t,\lambda x)=f(t,x)$. פתרון ע"י ההצבה $u=\frac{x}{t}$, מפורט בתרגול.

<u>משוואות לינאריות</u>:

משוואה לינארית: $f(t,x)$ פונקציה לינארית ביחס ל-x: $f(t,x)=-p(t)x+q(t)$, כאשר המשוואה היא: $x'+p(t)x=q(t)$.

משוואה לינארית הומוגנית:

$q(t)=0$, כלומר משוואה מהצורה $x'+p(t)x=0$.

<u>פתרון</u>: $x(t)=ce^{-\int_\alpha^t p(\tau)d\tau}$ (פתרון זו מורכב משני פתרונות: $ce^{-\int_\alpha^t p(\tau)d\tau}$ ו-0).

שיטת גורם אינטגרציה: (השלישי בטבלה בתרגול 1)

עבור המשוואה: $x'+p(t)x=q(t)$

<u>פתרון</u>: מחפשים פתרון מהצורה: $x(t)=y(t)e^{-\int_\alpha^t p(\tau)d\tau}$. יהי $\varphi(t)$ פתרון למשוואה ההומוגנית, כלומר: $\varphi'(t)+p(t)\varphi=0$, $\varphi=e^{-\int_\alpha^t p(\tau)d\tau}$.
המשך הפתרון – מפורט בתרגול.

משוואות מדוייקות: שיטה מלאה מפורטת בתרגול.

<u>תבנית דיפרנציאלית</u>: עבור $x'=f(t,x)$ הביטוי $\omega=M(t,x)dx+N(t,x)dt$, ותחום ההגדרה שלו הוא חיתוך תחומי ההגדרה של M ו-N.

טענה: ω מדוייקת אם קיימת פונקציה $u(t,x)$ כך ש-$\omega=du$.

משפט:

נניח התחום של ω שנסמנו D_ω הוא פשט קשיר (בין כל 2 נק' בתחום ניתן להעביר עקום לאו דווקא ישר) ופתוח. אזי:

- $\omega = du$ אמ"מ $\int_\gamma \omega = 0$ לכל מסילה סגורה $\gamma \in D$.
- $\omega = du$ אמ"מ $\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t}$ לכל t, x.

<u>דיפרנציאל</u>: של פונ' $u(t,x)$ בנקודה (t_0, x_0) הוא $du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx$.

<u>אינטגרל מסויים</u>: $\int_\alpha^\beta \varphi(t)dt$.

<u>אינטגרל מסילתי (קווי)</u>: עבור $u(t,x)$ הוא $\int udtdx$. בהינתן תבנית דיפרנציאלית ω ועקום מכוון מתקבל מספר שסימונו $\int_\gamma \omega$ כאשר γ המסילה.

<u>פרמטריזציה של עקומים</u>:

בהינתן עקום b פרמטריזציה היא פונ' γ של משתנה אחד τ כך ש:

- $\gamma(\tau) \in b$ לכל $\tau \in [\alpha, \beta]$.
- למעט מספר סופי של נקודות, בכל נקודה של b γ היא חח"ע.

משפט הפונקציה הסתומה:

נניח כי: $u(x,t) \in C^n$, $(t_0, x_0) \in D_u$ ו-$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, t_0) \neq 0$, אז: קיימת פונ' יחידה $\varphi(t,c) \in C^n$ כך ש:

- $u\big(t, \varphi(t,c)\big) = c$ בקטע $t_0 \in (\alpha, \beta)$
- $\varphi(t_0, c) = x_0$

משוואה מדוייקת:

תהי $x(t)$ פונקציה סתומה: $u(t,x) = c$ בתחום $D_x = [\alpha, \beta]$, המשוואה $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t}x' = 0$ היא מדוייקת. המשוואה תכתב: $\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial t}dt = 0$

ופתרון משוואה מדוייקת הוא פונ' סתומה $u(t,x) = c$.

<u>הערה</u>: בהינתן פונ' סתומה $F(x,y)$ מתקיים: $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

פירוש גיאומטרי של משוואה מסדר ראשון:

בהינתן $x' = f(t,x)$, השיפוע בנקודה (t,x) הוא כמובן $f(t,x)$. בודקים את היחס בין שיפוע זה לוקטור המיקום שהוא $\frac{x}{t}$, ואז מתקבל תיאור כללי של השיפוע בכל נקודה.

<u>קיום ויחידות פתרונות לבעיות התחלה</u>:

בהינתן משוואה עם תנאי התחלה: $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ ((t_0, x_0) תנאי התחלה). נתעניין האם קיימת φ המקיימת את הנתונים, האם היא יחידה והאם ישנה תלות בתנאי ההתחלה (כלומר, אם היה פתרון יחיד לתנאי ההתחלה, האם בשינוי תנאי ההתחלה יתקבל פתרון אחר). פתרון הינו קו אינטגרלי המוגדר ע"י פונ' הפתרון φ.

<u>משפט Peano</u>:

תהי $f(t,x)$ חסומה ורציפה בתחום G, ונניח $(t_0, x_0) \in \mathring{G}$ (בפנים התחום G; $\mathring{G} = G \backslash \partial G$), אזי: קיים לפחות קו אינטגרלי אחד העובר דרך (t_0, x_0).

<u>הערה</u>: בדוגמא $x' = \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}}$ ניתן לראות מדוע **אין** יחידות.

<u>משפט Picard</u>:

תהי $f(t,x) \in C^1(U)$ כאשר U הוא סביבה של (t_0, x_0), אזי: קיימת סביבה $t_0 \in V$ כך שלמשוואה $x' = f(t,x)$ קיים פתרון יחיד $\varphi(t)$ המקיים $\varphi(t_0) = x$ לכל x קרוב ל-x_0.

<u>העתקות מכווצות – Contraction Mappings</u>:

<u>מרחב מטרי</u>: (M, ρ) כאשר M קבוצת איברים ו-$\rho: M^2 \to \mathbb{R}$.

<u>מטריקה</u>: $\rho: M^2 \to \mathbb{R}$ פונ' (מרחק) בעלת התכונות:

- אי שלילית: $\rho(x,y) \geq 0$, $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- סימטרית: $\rho(x,y) = \rho(y,x)$.

- אשמ״ש: $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$ לכל $x,y,z \in M$.

<u>סדרת *Couchy*</u>: סדרה a_n במרחב מטרי (M,ρ) נקראת סדרת קושי/יסודית אם $\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \rho(a_m,a_n)=0$, ובמילים אחרות:

$$\forall\varepsilon>0\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\forall n,m>N_\varepsilon:\rho(a_m,a_n)<\varepsilon$$

משפט:

כל סדרת קושי ב-$\mathbb{R}$ מתכנסת עם המטריקה הרגילה $\rho(x,y)=|x-y|$.

<u>מרחב מטרי שלם</u>: (M,ρ) מרחב מטרי שלם אם כל סדרת קושי ב-M מתכנסת לאיבר ב-M: $\forall\{a_n\}\subseteq M:\lim_{n\to\infty}a_n\in M$.

<u>העתקה מכווצת</u>: יהי (M,ρ) מרחב מטרי (לא בהכרח שלם), $A:M\to M$ העתקה. A תהיה העתקה מכווצת אם קיים $0\le\lambda<1$ כך ש:

$\rho(Ax,Ay)\le\lambda\rho(x,y)\ \ [<\rho(x,y)]$. אם העתקה מכווצת אז היא רציפה.

<u>נקודת שבת</u>: תהי M קבוצה ו-A העתקה. הנקודה $x\in M$ תהיה נקודת שבת אם $Ax=x$.

משפט:

יהי (M,ρ) מרחב מטרי <u>שלם</u>, $A:M\to M$ העתקה מכווצת, אזי:

- <u>קיימת</u> ל-A נקודת שבת.
- נקודה זו <u>יחידה</u>.

הוכחה:

יהי $x\in M$, נגדיר עבורו את הסדרה $a_n=A^nx$: $x,Ax,A^2x,\dots$.

1. הוכחה כי A^nx היא סדרת קושי:

יהי $d:=\rho(x,Ax)$, אזי: $\rho(A^nx,A^{n+1}x)\le\lambda^n\rho(x,Ax)=\lambda^n\cdot d$, וזאת כיוון ש-$A$ העתקה מכווצת עם מקדם λ. יהי n ויהי $m=n+k$ עבור k כלשהו. רוצים להראות כי $\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}}\rho(A^nx,A^{n+k}x)=0$:

$$\rho(A^nx,A^{n+k}x)\le\lambda^n\rho(x,A^kx)\le$$

$$\rho(x,A^kx)\underset{\text{אשמ"ש}}{\le}\underbrace{\rho(x,Ax)}_{=d}+\rho(Ax,A^kx)\underset{\text{אשמ"ש}}{\le}d+\underbrace{\rho(Ax,A^2x)}_{\le\lambda\rho(x,Ax)}+\rho(A^2x,A^kx)\le d+\lambda d+\lambda^2d+\dots+\lambda^{k-1}d=(1+\lambda+\dots+\lambda^{k-1})d$$

$$\le\lambda^n(1+\lambda+\dots+\lambda^{k-1})d\Rightarrow\lim_{\substack{n\to\infty \\ k\to\infty}}\rho(A^nx,A^{n+k}x)=\underbrace{\lim_{n\to\infty}\lambda^n}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{k\to\infty}(1+\dots+\lambda^{k-1})d}_{=d\cdot\frac{1}{1-\lambda}=const}=0$$

2. M מרחב שלם ולכן $\lim_{n\to\infty}A^nx\in M$. יהי $X:=\lim_{n\to\infty}A^nx$.
3. X נקודת שבת של A: $AX=A[\lim_{n\to\infty}A^nX]$.

אם A מכווצת היא רציפה, ולכן מותר להכניס את ה-A לתוך הגבול ולקבל: $AX=\lim_{n\to\infty}A^{n+1}x=X$ ולכן X נקודת שבת של A.

4. יחידות נקודת השבת:

נניח קיימת $Y\ne X$ כך ש-$AY=Y$, אז: $\rho(X,Y)=\rho(A^nY,A^nX)$ לכל n כי X,Y נקודות שבת. מכאן:

$$\rho(Y,X)=\lim_{n\to\infty}\rho(A^nY,A^nX)\underset{A\text{ מכווצת}}{\le}\lim_{n\to\infty}\lambda^n\rho(Y,X)=0\Rightarrow\rho(Y,X)=0\Rightarrow X=Y$$

□

עבור $\begin{cases}x'(t)=f(t,x)\\x(t_0)=x_0\end{cases}$ יהיה פתרון $\varphi(t)$ בקטע (פתוח או סגור) $[\alpha,\beta]$ אם $\varphi'(t)=f(t,\varphi(t))$ לכל $t\in[\alpha,\beta]$, ובאופן שקול:

$$\varphi(t)=\int_{t_0}^t f[\tau,\varphi(\tau)]d\tau+x_0$$

תנאי ההתחלה מתבטא בתוספת x_0 ובגבול התחתון של האינטגרל, כך ש-$\varphi(t_0)=x_0$.

<u>העתקת *Picard*</u>: $A:M\to M,(A\varphi)(t)=x_0+\int_{t_0}^t f[\tau,\varphi(\tau)]d\tau$.

מתקיים: φ הוא פתרון למשוואה $\Leftrightarrow A\varphi=\varphi$, כלומר φ נקודת שבת של A.

תנאי ליפשיץ:

יהיו $(M_1,\rho_1),(M_2,\rho_2)$ שני מרחבים מטריים, A העתקה המקיימת: $A:M_1\to M_2$, אז A מקיימת תנאי ליפשיץ אם קיים $L>0$ כך ש:

$$\rho_2(Ax,Ay) \leq L \cdot \rho_1(x,y)$$

מושגי טופולוגיה:

<u>כדור</u>: כדור ברדיוס $r > 0$ עם מרכז בנקודה $x \in M$, ו-(M,ρ) מרחב מטרי:

- כדור פתוח: $B(r,x) = \{y \in M \mid \rho(y,x) < r\}$
- כדור סגור: $\bar{B}(r,x) = \{y \in M \mid \rho(y,x) \leq r\}$

<u>קבוצה פתוחה</u>: U קבוצה פתוחה ב-(M,ρ) אם לכל $x \in U$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$B(x,\varepsilon) \subseteq U$ (B כדור פתוח).

<u>קבוצה סגורה</u>: V קבוצה סגורה ב-(M,ρ) אם V^c (המשלים: $M \backslash V$) הוא קבוצה פתוחה.

<u>קבוצה קומפקטית</u>: V קבוצה קומפקטית ב-(M,ρ) אם:

- V קבוצה סגורה.
- V חסומה, כלומר קיימים $x \in M, R > 0$ כך ש: $V \subset B(x,R)$.

<u>קבוצה קמורה</u>: יהי V מרחב וקטורי (לא בהכרח ממימד סופי), $G \subset V$ קבוצה. G קבוצה קמורה אם לכל $x,y \in G$ הקטע הישר (כל הנקודות על הקטע) $\underset{0\leq t\leq 1}{\gamma(t)} = xt + y(1-t)$ מקיים: $\gamma(t) \in G$ לכל $0 \leq t \leq 1$.

משפט:

נניח $f \in C^1(G)$ (נגזרות חלקיות רציפות) בקבוצה קמורה $G \subseteq \mathbb{R}^2$, אז: f מקיימת תנאי ליפשיץ ב-G עם קבוע $\|\nabla f\|$ כאשר $L = \max_G \|\nabla f\|$

$\nabla f(t,x) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$ – גרדיאנט, ומתקיים: $\|\nabla f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$.

<u>הערה</u>: בד"כ המשפט הוא עם sup ולא עם max.

הוכחה:

נחבר את הנקודות $(t_1,x_1),(t_2,x_2) \in G$ בקטע הישר: $\gamma(\tau) = \tau(t_1,x_1) + (1-\tau)(t_2,x_2)$. מתקיים:

כיוון ש- $\gamma(0) = (t_1,x_1), \gamma(1) = (t_2,x_2) \Rightarrow f(t_2,x_2) - f(t_1,x_1) = f \circ \gamma(0) - f \circ \gamma(1)$ - $|f(t_2,x_2) - f(t_1,x_1)| = \left|\int_0^1 \frac{df \circ \gamma}{d\tau} d\tau\right| =$

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial t}[\gamma(\tau)] \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} = < \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{d}{d\tau}(t,x) > = < \nabla f, \dot{\gamma} >$$

$$= \left|\int_0^1 < \nabla f, \dot{\gamma} > d\tau\right| \leq \int_0^1 | < \nabla f, \dot{\gamma} > | d\tau \underset{\text{אשמ"ש קושי–שוורץ}}{\leq} \int_0^1 \|\nabla f\| \cdot \|\dot{\gamma}\| d\tau \leq max\|\nabla f\| \cdot \int_0^1 \|\dot{\gamma}\| d\tau = max\|\nabla f\| \cdot \|x - y\|$$

$\Rightarrow L = \max \|\nabla f\|$ $\square$

משפט הקיום והיחידות:

$x' = f(t,x)$, $f, f'_x \in C(U)$, $(t_0,x_0) \in U$, אזי הפתרון $\varphi(t)$:

- קיים.
- יחיד.
- עבור $\varphi(t,x)$ פתרון לבעיית ההתחלה $x(t_0) = x$ אז $\varphi(t,x) \in C$ (רציפה ביחס ל-x).

φ פתרון אמ"מ היא נקודת שבת להעתקת פיקרד.

משפט:

אם $A: M \to M$ העתקה מכווצת אזי קיימת נקודת שבת <u>יחידה</u> (כאשר העתקה מכווצת מקיימת: $\lambda < 1$, $\rho(Ax,Ay) \leq \lambda\rho(x,y)$).

משפט *Picard-Lindelöf*:

יהי $Z = Z_{a,b} := \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$ גליל (מלבן ב-$\mathbb{R}^2$). ממשפט היחידות ב-(t_0,x_0) עובר קו אינטגרלי יחיד. תבי $f \in C(Z)$, $c := \max_Z |f|$, f מקיימת תנאי ליפשיץ לפי x: $\forall t: |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, $\delta := \min\left(a, \frac{b}{c}\right)$, אזי:

- קיימת פונקציה $\varphi(t)$ יחידה מוגדרת בקטע $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ המקיימת $\varphi' = f(t, \varphi(t))$ לכל $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\varphi(t_0) = x_0$.

- מתקיימים: $\left|\varphi_{n(t)}-\varphi(t)\right| \leq \frac{c\cdot L^{n-1}}{n!}\delta^n$ לכל $|t-t_0|<\delta$ כאשר $\begin{cases}\varphi_0 \equiv x_0 \\ \varphi_{n+1}=x_0+\int_{t_0}^{t} f\left(\tau,\varphi_n(\tau)\right)d\tau\end{cases}$ (φ_n הוא קירוב פיקרד).

הערה: תהליך פיקרד לא תמיד מתכנס, יתכן ויתקבלו כמה תתי סדרות.

הרחבה של פתרונות:

משפט:

תהי $f\in C(V), \frac{\partial f}{\partial x}$ כאשר V תחום קומפקטי (סגור וחסום), $(t_0,x_0)\in \mathring{V}$, אזי: את הקו האינטגרלי העובר דרך (t_0,x_0) ניתן להרחיב עד השפה ∂V.

מערכות משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר 1:

נתונה מערכת מד"ר: $\begin{cases}x_1'=f_1(t,x_1,\dots,x_n)\\ \dots \\ x_n'=f_n(t,x_1,\dots,x_n)\end{cases}$; סימונים: $x=(x_1,\dots,x_n)$, $f:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^n$, כלומר המרחב הפאזי הוא $\mathbb{R}^n$, והמרחב הפאזי המורחב (הכולל זמן) הוא $\mathbb{R}^{n+1}$ - בו נמצא הקו האינטגרלי. המערכת תייוצג כך: $x'=f(t,x)$.

- פתרון: $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$.
- בעיית התחלה: $x(t_0)=x_0$ כאשר $x_0\in\mathbb{R}^n$.

כל משוואה מסדר n ניתנת ע"י סימונים להעברה למערכת של n משוואות.

מערכות אוטונומיות:

צורה: מערכות מהצורה $\dot{x}=F(x)$ (ללא תלות ב-t), $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ ($F=(F_1,\dots,F_n), F_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$), $F\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ - כלומר כל הנגזרות החלקיות $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ הן פונ' רציפות (מטריצת יעקובי רציפה).

משפט:

יהי $\varphi(t)$ פתרון למשוואה אוטונומית $x'=g(x)$, נבנה פונקציה חדשה (הזזה): $\varphi_s(t)=\varphi(t+s)$, אזי היא גם פתרון.

הוכחה: כלל השרשרת: $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\underbrace{\frac{d(s+t)}{dt}}_{s\ is\ const} = \frac{d\varphi_s}{dt}(t)$; כמו כן $g(x)$ אינה תלויה ב-t. סה"כ אין השפעה על הזזה בקבוע כי הנגזרת נשארת זהה. □

כל מערכת לא אוטונומית ניתנת לרישום בצורה אוטונומית ע"י הגדרת $t \coloneqq x_{n+1}$ (ואז $x_{n+1}'=1$). הקו הפאזי של המערכת החדשה הוא קו אינטגרלי של המערכת המקורית.

שדה וקטורי F: בכל נקודה במרחב $\mathbb{R}^n$ נתון וקטור עם הקורדינטות $\left(F_1(x),\dots,F_n(x)\right)$.

נקודה קריטית: c תהיה נקודה קריטית/סינגולרית לשדה F אם $F(x)=\theta$.

מרחב פאזה: תחום ההגדרה של F: $D_F\subseteq\mathbb{R}^n$, כלומר D_F מרחב פאזה של $\dot{x}=F(x)$.

מרחב פאזה מורחב: $\mathbb{R}\times D_F$ הוא מרחב פאזה מורחב של F – כאשר מוסיפים מקום ל-t.

קו אינטגרלי: פתרון של $\dot{x}=F(x)$ - קו ב-$\mathbb{R}^{n+1}$ - כי הפתרון הוא פונ' של t.

קו פאזי: התמונה של הקו האינטגרלי. עבור φ פתרון, הקו/עקום פאזי של המערכת הוא $Im(\varphi)\subseteq\mathbb{R}^n$.

משפט:

לכל $s\in\mathbb{R}$ נסמן $h^s:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה: $h^s(t)=t+s$, ויהי $\varphi(t)$ פתרון ל-$\dot{x}=F(x)$, אזי $\varphi\circ h^s$ גם פתרון, כלומר הפתרון אינו תלוי t. למעשה כל הקווים המקבילים הם פתרון (עבור t המוגד לכל $\mathbb{R}$).

משפט:

דרך כל נקודה במרחב פאזה לא עובר יותר מקו פאזה אחד.

הוכחה:

נניח ישנם שני פתרונות φ,ψ, אז קיימים $a,b\in\mathbb{R}^{n+1}$ כך ש-$\varphi(a)=\psi(b)$ ו-$Im(\varphi)\neq Im(\psi)$. לפי המשפט הקודם $\varphi_a\coloneqq\varphi\circ h^{a-b}$ הוא גם פתרון, אבל $\varphi_a(b)=\psi(b)$ - אותו תנאי התחלה שכן $\varphi_a(b)=\varphi(b+a-b)=\varphi(a)$. לפי משפט היחידות: $\varphi_a=\psi$ אבל אז $Im(\varphi_a)=Im(\psi) \underset{\varphi_a(t)=\varphi(t+a-b)}{=} Im(\varphi)$ (בגלל שהתחום הוא כל $\mathbb{R}$ התמונות שוות), ולכן $Im(\varphi)=Im(\psi)$ - סתירה. □

משפט:

לקו פאזה 3 אפשרויות:

- נקודה בודדת – נקודת שבת של המערכת.
- קו סגור (שקול למעגל) ללא נקודות חיתוך עצמיות, כמו ○.
- ללא נקודות חיתוך עצמי כלל, כמו ספירלה למשל (ולא כמו ∞).

טענה:

תהי $\varphi(t)$ פתרון של $\dot{x} = F(x)$ בקטע $[\alpha, \beta]$ בעל התכונה שקיימים a, b $(b > a)$ כך ש-$\varphi(a) = \varphi(b)$ - כלומר יש חיתוך עצמי. אזי קיימת Φ כך ש:

- תחום ההגדרה של $\Phi(t)$ הוא כל $\mathbb{R}$.
- Φ מחזורית עם מחזור $T := b - a$.
- $\Phi(t) = \varphi(t)$ לכל $a \le t \le b$, כלומר Φ הרחבה של φ.

טענה: תהי f פונקציה ב-$\mathbb{R}$, T ו-S מחזורים של f, אזי $T + S$ גם כן מחזור של f.

טענה: תהי P קבוצת כל המחזורים של $f(t)$ פוני רציפה: $P = \{T \in \mathbb{R} | \ \forall t. f(t + T) = f(t)\}$, ותהי $T_k \in P$ סדרה מתכנסת, אזי: $\lim_{k\to\infty} T_k \in P$.

הוכחה: $f(t + \lim_{k\to\infty} T_k) = \lim_{k\to\infty} f(t + T_k) \underset{T_k \in P}{=} \lim_{k\to\infty} f(t) = f(t) \Rightarrow \lim_{k\to\infty} T_k \in P$ □

משפט:

תהי $P \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה סגורה ביחס ל-"+" וסגורה, אזי: $P = \mathbb{R}$ או $P = \{0\}$ או קיים $d \in \mathbb{R}$ כך ש-$P = \mathbb{Z}_d$, כלומר $P = \{0, \pm d, \pm 2d, \dots\}$.

<u>אינטגרל ראשון</u>:

<u>נגזרת של פונקציה לפי וקטור $F(x)$</u>:

יהיו $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $H: U \to \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ כאשר F שדה וקטורי ב-U.

הישר $\gamma(s) = x + sF$ עובר דרך וקטור F, $(H \circ \gamma)(s) = H(x + sF)$ פונקציה של s, הנגזרת של H לפי $F(x)$: $L_F H := \frac{d(H\circ\gamma)}{ds}|_{s=0}$.

$$\frac{d}{ds} H(x + sF)|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x + sF)|_{s=0} \cdot F_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}(x) \cdot F_i = < \nabla_x H, F(\lambda) > \Rightarrow L_F H = < \nabla H, F >$$

זו הנגזרת לפי F – כמו הנגזרת הכיוונית לפי F רק לא מנורמלת (מוכפלת ב-$\frac{1}{\|F\|}$).

<u>אינטגרל ראשון</u>:

יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום, $H: U \to \mathbb{R}$ הוא <u>אינטגרל ראשון</u> של המשוואה (הרב מימדית = מערכת משוואות) $\dot{x} = F(x)$ אם $L_F H = 0$ בכל U, כאשר $L_F H$ היא נגזרת לפי שדה F, H פונקציה של x, $L_F: C^r(U) \to C^{r-1}(U)$.

<u>תכונות</u>:

- <u>אדיטיביות</u>: $L_F(H + G) = L_F(H) + L_F(G)$.
- <u>כלל לייבניץ</u>: $L_F(HG) = H \cdot L_F G + G \cdot L_F H$.
- <u>סכום שדות</u>: $L_{F_1+F_2} = L_{F_1} + L_{F_2}$, כאשר $F_1 + F_2$ הוא שדה חדש.
- <u>כפל שדה בפונ'</u>: $(fF)(x) = \underset{\text{מספר}}{f(x)} \cdot \underset{\text{וקטור}}{F(x)}$. שדות וקטורים מהווים מודול מעל חוג/אלגברה $C^r(U)$ (פונקציות). מכאן: $L_{fF} = f L_F$, $f \in C^r(U)$.

משפט:

- $L_F H = 0$ אמ"מ $H \circ \varphi = const$ לכל פתרון $\varphi(t)$.
- $L_F H = 0$ אמ"מ כל קו פאזה שייך לאחד (בלבד) ממשטחי גובה של H, כאשר משטח גובה עבור $H(x)$ המתאים ל-c הוא $H^{-1}(c)$ (המקור של c לפי H ב-U).

הוכחה:

- $\Leftarrow$: נתון כי $L_F H = 0$ ו-$\dot{\varphi} = F(\varphi(t))$. מהנתון עולה כי הנגזרת של $H \circ \varphi$ לפי t היא 0 ולכן $H \circ \varphi$ קבועה. $\frac{d}{dt}(H \circ \varphi) = < \nabla H, \dot{\varphi} > = < \nabla H, F \ge 0$

$\Leftarrow$: כיוון זה זהה.

- $Im(\varphi)$ הוא קו פאזה, φ פתרון – לפי הנ"ל ידוע ש-$H \circ \varphi = const$ אמ"מ H לאורך קו פאזה H קבועה, ולפי הנ"ל $H \circ \varphi = const$ אמ"מ $L_F H = 0$. □

משוואות קונסרבטיביות מדרגת חופש אחת:

משוואת ניוטון: $\ddot{x} = f(x)$, $f(x)$ "שדה כוחות". כתיבה כמע' משוואות: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$. נגדיר למערכת 3 פונקציות:

- אנרגיה קינטית: $T(y) = \frac{y^2}{2}$
- אנרגיה פוטנציאלית: תלויה במיקום, פונ' קדומה של T: $u(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$
- פונקציית *Hamilton*: $H(x,y) \coloneqq T(y) + u(x)$

משפט:

H היא אינטגרל ראשון של $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$.

הוכחה:

$$\forall x,y\ F(x,y) = \big(y, f(x)\big);\quad L_F H = <\nabla H, F> = \frac{\partial H}{\partial x}\cdot y + \frac{\partial H}{\partial y}\cdot f(x) = \underbrace{u'(x)}_{=\left(-\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi\right)' = -f(x)}\cdot y + \underbrace{T'(y)}_{=\left(\frac{y^2}{2}\right)' = y} = -f(x)\cdot y + y\cdot f(x) = 0 \ \square$$

משפט:

נסמן $E = \frac{y^2}{2} - \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$, E קבוע (אנרגיה), אזי: קו פאזה (קו גובה) E הוא עקום חלק בסביבה של כל נקודה רגילה, כלומר נקודה שאינה קריטית (נקודה קריטית (x,y) מקיימת $F(x,y) = 0$, כלומר במקרה זה עבור $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) \end{cases}$: $y = 0, f(x) = 0$).

הוכחה:

$H(x,y) = 0$ בסביבה של (x_0, y_0). לפי משפט הפונ' הסתומה: אם $\frac{\partial H}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ אז קיימת פונ' $\gamma(x)$ גזירה כך ש-$H(x, \gamma(x)) = 0$ בסביבה כלשהי של x_0. $\frac{\partial H}{\partial y} = y$ ולכן אם $y \neq 0$ הוכחנו. אם $y = 0$ אז בהכרח $f(x) \neq 0$ כי הנקודה אינה קריטית, ובמקרה זה: $\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{2} - \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi\right) = -f(x) \neq 0$ - ומכאן גם בנקודה זו קיימת פונ' גזירה $\psi(y)$ כך ש-$H(\psi(y), y) = 0$ בסביבה מסויימת של y_0 □

נקודה קריטית: (x_c, y_c) תהיה נקודה קריטית אם $F(x_c, y_c) = 0$ וזה אמ"מ (x_c, y_x) נק' קריטית ל-H (כלומר $\nabla H = 0$ או $dH = 0$) כאשר H הוא פונ' המילטון – אינטגרל ראשון.

ערך קריטי: E ערך קריטי של H אם $H(x_c, y_c) = E$ (ערך הפונ' בנקודה הקריטית בה $\nabla H(x_c, y_c) = 0$).

קווי פאזה סביב נקודה קריטית:

נקודה קריטית: $\begin{cases} u'(x_c) = 0 \\ y_c = 0 \end{cases}$

למת *Morse*:

תהי u פונ' בעלת התכונות: (1) $u'(0) = 0$, (2) $u''(0) \neq 0$ (נקודה קריטית לא מנוונת, כלומר מינימום או מקסימום, לא אוכף), אזי: קיימת קורד' $\omega = \psi(x)$ כך ש-$(u \circ \psi^{-1})(\omega) = sgn(u''(0)) \cdot \omega^2$ (נשים לב כי $x = \psi^{-1}(\omega)$).

ψ היא פונ' גזירה, הפיכה והפונ' ההופכית שלה גם גזירה – כלומר היא דיפיאומורפיזם.

למת *Hadamard*:

נניח $u \in C^r$ סביב 0 ומקיימת $u(0) = 0$, אזי: קיימת $g(x) \in C^{r-1}$ סביב 0 כך ש-$u(x) = x \cdot g(x)$.

הוכחה: $u(x) = \int_0^1 \frac{du(tx)}{dt}dt = x \cdot \underbrace{\int_0^1 u'(tx)dt}_{\coloneqq g(x)} = x \cdot g(x)$ □

משפט:

נניח כי $u(x)$ פונ' הפוטנציאל חסומה מלמטה, כלומר $u(x) > h$ לכל x, אז ניתן להמשיך כל פתרון של $\ddot{x} = -\frac{du}{dx}$ לכל ציר t (כי $u'(x) = -f(x)$).

<u>מערכות לינאריות</u>:

$F(x) = Ax$, $A \in Mat_n(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = F(x) = Ax$.

<u>לינאריזציה</u>: המשוואה (מע' המשוואות) $\dot{\xi} = \mathcal{J}_{x_0}(F) \cdot \xi$ נראת לינאריזציה של $\dot{x} = F(x)$ סביב נקודה x_0 כאשר $\mathcal{J}_{x_0}(F) = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n |_{x=x_0}$ היא מט' יעקובי של F.

<u>נורמה של אופרטור</u>: $\|A\| := \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$

משפט: $A = (a_{ij}), \|A\| \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2$

משפט:

תהי L קבוצת כל האופרטורים $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, שהוא מרחב וקטורי, אזי $(L, \|\cdot\|)$ הוא מרחב <u>מטרי שלם</u>, כאשר $\|\cdot\| = \rho(A,B) = \|A-B\|$ ו-L הוא מרחב נורמה (וכל מרחב נורמה הוא מרחב מטרי). לכן, כל סדרת קושי ב-L מתכנסת לאיבר ב-L.

משפט *Weierstrass*:

תהי $f_i: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ סדרת פונ' בעלת התכונה $\|f_i(t)\| \leq a_i$ לכל t כאשר $a_i \in \mathbb{R}_{\geq}$, אזי: אם $\sum_{i=1}^\infty a_i$ מתכנס, $\sum_{i=1}^\infty f_i(t)$ מתכנס בהחלט ובמ"ש.

משפט:

נניח $f_i \in C^1$, $\sum_{i=1}^\infty f_i$ מתכנס ו-$\sum_{i=1}^\infty f_i'$ מתכנס במ"ש, אזי: $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^\infty f_i = \sum_{i=1}^\infty f_i'$.

מסקנות:

- הטור $e^{At} = \sum \frac{A^k t^k}{k!}$ מתכנס בכל קטע ב-$\mathbb{R}$ בהחלט ובמ"ש.
- $\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$.
- $\varphi(t) = e^{At} \cdot x_0$ הוא פתרון לבעיית ההתחלה $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$.

טענה:

- אם A לכסינה ומתקיים $A = PDP^{-1}$ אז: $e^{At} = e^{PDP^{-1}t} = Pe^{Dt}P^{-1}$.
- אם $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ אז $e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$.

משפט *C. Jordan*:

- לכל אופרטור $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ קיים בסיס כך שהמטריצה של A מקבלת צורה: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & c_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ - צורת ג'ורדן נורמלית, כאשר λ_k הם ע"ע של A, $c_k \in \{0,1\}$.
- ניתן להציג כל מטריצה/אופרטור כסכום $A = A_s + A_n$ כאשר A_s מטריצה לכסינה ו-A_n מטריצה נילפוטנטית (מתאפסת החל מחזקה מסויימת), ו-$A_n A_s = A_s A_n$ (מתחלפות), וכך: $e^{At} = e^{A_s t} \cdot e^{A_n t}$.

משפט:

אם A, B מתחלפות ($AB = BA$) אז $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

פתרון ל-$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$:

<u>כאשר ע״ע שונים</u>:

- מוצאים משוואה אופיינית של A: $\det(A-\lambda E)$.
- מוצאים את שורשי הפולינום $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
- מוצאים ו״ע מתאימים $\xi_1,\dots,\xi_n$.
- מציגים את x_0 דרך בסיס (ξ_i): $x_0=\sum_{k=1}^{n}c_k\xi_k$ ($t=0$ ולכן $e^{\lambda_i t}=1$).
- הפתרון: $x(t)=\sum_{k=1}^{n}c_k e^{\lambda_i t}\xi_k$.

<u>ע״ע מרוכבים</u>: פירוט דרכי פתרון למקרים שונים בתרגול.

לשים לב: עבור I אופרטור כפל ב-i, המטי׳ של I בבסיס הסטנדרטי היא $I=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ומקיימת: $Iz=i\cdot z, z\in\mathbb{C}$.

<u>מכפלה קרטזית של מערכות מד״ר</u>:

לכל מטריצה יש צורה קנונית של ג׳ורדן מעל המרוכבים: $A=\begin{pmatrix}\mathcal{J}_{m_1}(\lambda_1)&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&\mathcal{J}_{m_l}(\lambda_l)\end{pmatrix}$ (בלוקים) כאשר $\mathcal{J}_m(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ &&\lambda&1\\ 0&\dots&0&\lambda\end{pmatrix}\in Mat_m$

ו-$m_1+\dots+m_l=n$.

$\dot x=Ax$ היא מכפלה של מערכות $\dot y_k=\mathcal{J}_{m_k}(\lambda_k)y_k$: $\begin{cases}\dot y_1=\mathcal{J}_{m_1}(\lambda_1)y_1\\ \dots\\ \dot y_l=\mathcal{J}_{m_l}(\lambda_l)y_l\end{cases}$ והפתרון הוא: $x(t)=\begin{pmatrix}y_1(t)\\ \vdots\\ y_l(t)\end{pmatrix}$.

ע״ע עם ריבוי:

$\dot x=Ax, A=\lambda E+N, N=\begin{pmatrix}0&1&\dots&0\\ \vdots&0&\ddots&\vdots\\ &&\ddots&1\\ 0&\dots&0&0\end{pmatrix}, N^n=0, N^{n-1}\neq 0$: $e^{At}=e^{\lambda t}\cdot e^{Nt}$.

<u>משוואות $\dot x=A(t)x$</u>:

$A(t)\in Mat_n(C[\alpha,\beta])$: ניתן להרחיב את הפתרון עד לקצוות.

נניח $x(t)$ פתרון של $\dot x=A(t)x$, המוגדר לקטע $[t_0,t]$ $(\alpha\le t_0\le t\le\beta)$, אזי: $\|x(t)\|\le e^{c(t-t_0)}\cdot\|x(t_0)\|$ כאשר $c=\max_{t\in[\alpha,\beta]}\|A(t)\|$.

טענה:

אם x_1,x_2 שני פתרונות למשוואה $x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\dots+a_1\dot x+a_0x=g(t)$ אז $y:=x_1-x_2$ הוא פתרון למשוואה ההומוגנית המתאימה לה.

משפט: ניתן להמשיך את כל הפתרון של בעיית ההתחלה $\begin{cases}\dot x=A(t)x\\ x(t_0)=x_0\end{cases}$ $(\alpha\le t_0\le\beta)$ עד $t=\beta$.

<u>מסקנה</u>: ניתן להרחיב כל פתרון של $\dot x=Ax$ לכל $\mathbb{R}$.

<u>מרחב וקטורי של פתרונות</u>:

יהי X מרחב וקטורי של פתרונות $\dot x=A(t)x$.

משפט עיקרי של מד״ר 1:

X איזומורפי למרחב הפאזה של $\dot x=A(t)x$ ($\approx\mathbb{R}^n$), כלומר: $X\cong\mathbb{R}^n$.

<u>מסקנות</u>:

- $\dim X=n$
- האופרטור $B_{t_2}B_{t_1}^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ הוא איזומורפיזם (מ-$\mathbb{R}^n$ ל-X ומ-X ל-$\mathbb{R}^n$).

<u>הערה</u>: כל מערכת עם n וקטורים במרחב וקטורי ממימד n מהווה בסיס (אורתוגונליים אחד לשני).

<u>וורונסקיאן</u>:

יהיו $\varphi_k=\begin{pmatrix}\varphi_{k1}\\ \vdots\\ \varphi_{kn}\end{pmatrix}$, $\varphi_i\in[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^n$, אזי הפונ׳ וורונסקיאן $W:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ מוגדרת: $W(t):=\begin{vmatrix}\varphi_{11}(t)&\varphi_{12}(t)&\dots&\varphi_{1n}(t)\\ \varphi_{21}(t)&\varphi_{22}(t)&\dots&\varphi_{12}(t)\\ \vdots&&\ddots&\vdots\\ \varphi_{n1}(t)&\varphi_{n2}(t)&\dots&\varphi_{nn}(t)\end{vmatrix}$.

נניח φ_i $(1\le i\le n)$ פתרונות ל-$\dot x=A(t)x$. W היא הוורונסקיאן של המערכת $\varphi_1,\dots,\varphi_n$.

משפט: אם לכל $t\in[\alpha,\beta]$ מתקיים $W(t)\neq 0$ אזי $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ פתרונות בת״ל.

<u>איזומורפיזם בין X ו-$\mathbb{R}^n$</u>:

מפורש: $X \ni \begin{pmatrix}\varphi^1(t)\\ \vdots \\ \varphi^n(t)\end{pmatrix} = \varphi(t)$; קובעים t_0 ואז פוני' האיזו' המסומנת ev_{t_0} מוגדרת: $ev_{t_0}(\varphi) = \begin{pmatrix}\varphi^1(t_0)\\ \vdots \\ \varphi^n(t_0)\end{pmatrix}$. לפי משפט הקיום והיחידות, ev_{t_0} היא איזומורפיזם, בכל נקודה עובר קו אחד ויחיד (האנך t_0 חותך את מרחב הפתרונות פעם אחת בדיוק בכל נקודה).

מסקנה: כל פתרון של $\dot{x} = A(t)x$ הוא צירוף לינארי של n פתרונות "יסודיים". כל בסיס ב-X נקרא מערכת פתרונות יסודית.

<u>משוואות $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x$ עבור $a_k(t) \in C[\alpha,\beta]$</u>:

יהי Y המרחב הוקטורי של הפתרונות, כאשר: $y_1 = x, y_2 = \dot{x} = \dot{y_1}, y_3 = \ddot{x} = \dot{y_2}, \dots, \dot{y}_{n-1} = x^{(n-2)} = y_{n-2}, \dot{y_n} = -a_1 y_{n-1} - \dots - a_n y_1$.

המטריצה המתאימה למערכת: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}$.

משפט: $Y \cong \mathbb{R}^n$

הוכחה:

$\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix}\varphi(t_0)\\ \dot{\varphi}(t_0) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}\end{pmatrix} \mapsto \varphi \in Y$: יהי $X_1,\dots,X_n \in Y$ מערכת יסודית (כלומר פתרונות ל-$\dot{x} = A(t)x$). ידוע: $W(t) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \dots & x_k^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_k^n \end{vmatrix} \neq 0$ אמ"מ $X_k(t) = \begin{pmatrix}x_k^1(t)\\ x_k^2(t) \\ \vdots \\ x_k^n(t)\end{pmatrix}$ בת"ל, ז"א קיים $t_0 \in [\alpha,\beta]$ כך ש-$W(t_0) \neq 0$. □

משפט:

הפתרונות $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ של $x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \dots + a_n x$ בת"ל אמ"מ קיים $t_0 \in [\alpha,\beta]$ כך ש-$W(t_0) \neq 0$, כאשר:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi_1}(t) & \dot{\varphi_2}(t) & \dots & \dot{\varphi_n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \varphi_2^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

<u>מסקנה</u>: אם $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ בת"ל אבל $W(t) \equiv 0$, אזי לא קיימת מד"ר ש-$\varphi_1,\dots,\varphi_n$ פתרונותיה.

<u>מערכות לינאריות לא הומוגניות</u>:

- $\dot{x} = A(t)x + h(t) \ \ (N)$
- $\dot{x} = A(t)x \ \ (H)$

<u>פתרון כללי ל-(H)</u>: $x(t) = c_1X_1(t) + \dots + c_nX_n(t)$, כאשר $X_1,\dots,X_n$ מערכת יסודית. $X_k(t) = \begin{pmatrix}X_k^1(t)\\ X_k^2(t) \\ \vdots \\ X_k^n(t)\end{pmatrix} \in Mat_{n\times 1}$.

<u>פתרון כללי ל-(N)</u>:

- $X(t) = \sum_{k=1}^n C_k(t)X_k(t)$
- $\dot{X}(t) = \sum_{k=1}^n \dot{C_k}(t)X_k(t) + \sum_{k=1}^n C_k(t)\dot{X_k}(t)$

$\dot{X_k} = A(t)X_k = \sum_{k=1}^n \dot{C_k}(t)X_k(t) + AX$ ומכאן X יהיה פתרון ל-(N) אמ"מ $h(t) = \sum_{k=1}^n \dot{C_k}(t)X_k(t)$.

<u>משוואות לינאריות</u>:

$\dot{x} = F(x)$, a נקודה המקיימת $F(a) = 0$.

<u>לינאריזציה</u>: המשוואה $\dot{x} = Ax$ היא לינאריזציה של $\dot{x} = F(x)$ סביב נקודה קריטית a אם: $A = \mathcal{J}ac_a(F)$ (מטריצת יעקובי של F ב-a).

<u>משוואות שקולות</u>: $\dot{x} = Ax, \dot{y} = By$, $A, B \in Mat_n$ יקראו שקולות אם קיימת מט׳ הפיכה P כך ש: $y = Px, B = PAP^{-1}$.

<u>מסקנה</u>: אם המשוואות שקולות, הפולי׳ האופייניים שווים.

<u>מערכות במישור ($n = 2$)</u>:

משפט:

תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \mu I_2$, אזי המערכת $\dot{x} = Ax$ שקולה ל-$\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\det A & trA \end{pmatrix} y$.

<u>מסקנה</u>: אם $A \neq \mu I_2$ אז $\dot{x} = Ax, \dot{y} = By$ שקולות אמ״מ הפולינומים האופייניים מקיימים: $p(A) = c \cdot p(B)$.

<u>יציבות</u>:

<u>יציבות</u>: תהי a נקי קריטית למשוואה אוטונומית $\dot{x} = F(x)$. אזי:

- <u>a יציבה (ליאופונוב)</u>: אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש: $\|x(0) - a\| < \delta \Rightarrow \forall t > 0. \|x(t) - a\| < \varepsilon$.
- <u>a אטרקטיבית</u>: אם קיים $\delta > 0$ כך ש: $\|x(0) - a\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t) - a\| = 0$.
- <u>a נקודה יציבה ממש</u>: אם שני הסעיפים הנ״ל מתקיימים.

משפט:

- הנקודה 0 אטרקטיבית למשוואה $\dot{x} = Ax$ אמ״מ $Re(\lambda_k) < 0$ לכל ע״ע של A.
- אם 0 נקודה אטרקטיבית, אז היא נקודה יציבה ממש.

מסקנה עבור סדר 2:

עבור $\dot{x} = Ax, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + \underbrace{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}_{=ad-bc} = \lambda^2 + p\lambda + q$: $\Delta = (a - d)^2 + 4bc$:

ניתן להסתכל על הנתונים Δ, p, q וכל השאר כדי להסיק מהם על מסי הע״ע השונים, ריבויים וסימנים, ומהם להסיק על יציבות באופן הבא:

- אם כל הע״ע שליליים (שונים שליליים או אחד שלילי מריבוי 2) – יציבות ממש (לחלוטין), כלומר שאיפה ל-0 כש-$t \to \infty$.
- אם יש ערך עצמי אחד לפחות חיובי ממש, אין יציבות בגלל שאיפה לאינסוף כש-$t \to \infty$.
- אם יש ע״ע שלילי וע״ע 0 או ע״ע 0 מריבוי 2 – יש יציבות רגילה, כיוון שהאקספוננט נהיה 1, וכש-$t \to \infty$ מקבלים קבוע.

תמיד להסתכל על צורת הפתרונות: $c \cdot e^{\lambda t}$ - ומהם להסיק מה קורה כש-$t \to \infty$.