שאלה 3

(1) $h(t)=\begin{pmatrix}4e^{5t}\\0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$, $\dot{x}=Ax+h(t)$

<u>פתרון:</u> נמצא תחילה את פתרון המשוואה ההומוגנית, $\dot{x}=Ax$:

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)-2\cdot 1=6-2\lambda-3\lambda+\lambda^2-2=$$

$$=\lambda^2-5\lambda+4 \quad . \quad p(\lambda)=0 \Leftrightarrow \lambda^2-5\lambda+4=0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{5\pm 3}{2} \Rightarrow \boxed{\lambda_1=4\ ,\ \lambda_2=1}$$

נמצא ו"ע :

$\underline{\lambda_1=4}$: $\begin{pmatrix}3-4&2\\1&2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow$

$\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad x-2y=0 \Rightarrow \quad x=2y$

ו"ע מתאים : $\boxed{v_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}}$

$\underline{\lambda_2=1}$: $\begin{pmatrix}3-1&2\\1&2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \quad x=-y \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}$

$$x_h(t)=\underbrace{c_1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\cdot e^{4t}}_{x_1}+\underbrace{c_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\cdot e^{t}}_{x_2} \quad \checkmark$$

⇐ הפתרון של המשוואה ההומוגנית: כאשר c_1, c_2 קבועים כלשהם.

נכתוב הפתרון של המשוואה הלא הומוגנית, ונניח ש-c_1,c_2 תלויים כעת ב-t, ונקבל:

$$\begin{cases}2\dot{c}_1e^{4t}+\dot{c}_2e^{t}=4e^{5t}\\ \dot{c}_1e^{4t}-\dot{c}_2e^{t}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3\dot{c}_1e^{4t}+0=4e^{5t} \Rightarrow 3\dot{c}_1=4e^{t} \Rightarrow \dot{c}_1=\frac{4}{3}e^{t}$$

$$\Rightarrow c_1=\int\dot{c}_1\,dt=\int\frac{4}{3}e^{t}\,dt=\boxed{\frac{4}{3}e^{t}}$$ (מתעלמים מקבוע כאן)

$$\dot{c}_2e^{t}=4e^{5t}-2\dot{c}_1e^{4t}=4e^{5t}-2\cdot\frac{4}{3}e^{t}\cdot e^{4t}=4e^{5t}-\frac{8}{3}e^{5t}=\frac{4}{3}e^{5t}$$

$$\Rightarrow \dot{c}_2=\frac{4}{3}e^{4t} \Rightarrow c_2=\int\frac{4}{3}e^{4t}\,dt=\boxed{\frac{1}{3}e^{4t}}$$ (גם כאן מתעלמים מהקבוע)

⇐ הפתרון הלא הומוגני הוא:

$$\overset{\text{פתרון ראשון}}{c_1\cdot x_1}+\overset{\text{פתרון שני}}{c_2\cdot x_2}=$$

$$=\frac{4}{3}e^{t}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t}+\frac{1}{3}e^{4t}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}=\begin{pmatrix}8/3\\4/3\end{pmatrix}e^{5t}+\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix}e^{5t}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}$$

$\Rightarrow$ הפתרון הסופי הכללי הוא:

$$\boxed{x(t)=c_1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t}+c_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}} \quad \checkmark$$

עבור c_1,c_2 קבועים כלשהם

(2) $x(0)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$:

$$x(0)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2c_1+c_2+3\\c_1-c_2+1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2c_1+c_2=0 & \Rightarrow c_2=-2c_1\\ c_1-c_2=3\end{cases}$$

$$3c_1=3 \Rightarrow \boxed{c_1=1 \Rightarrow c_2=-2}$$

⇐ הפתרון הפרטי לתנאי ההתחלה הוא:

$$\boxed{x(t)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}e^{4t}+\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}e^{5t}} \quad \checkmark$$

שאלה א'

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y + x^3 \\ \dot{y} = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

$F(x,y) = (-2x+y+x^3,\ -x-2y+3x^5) = (0,0) \Leftrightarrow$

$-2x + y + x^3 = -x - 2y + 3x^5 \Leftrightarrow$

$3y = 3x^5 - x^3 + x \Leftrightarrow y = x^5 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x = x(x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3})$

$\Rightarrow x=0,\quad x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3} = 0$

נסמן $x^2 = p$ ונקבל

$p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{3} = 0$

$p_{1,2} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{4}{3}}}{2} = \frac{\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{12}{9}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{6} = \frac{1}{6} \pm i\frac{\sqrt{11}}{6}$

$x^2 = \frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{11}}{6} \Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{6} + i\frac{\sqrt{11}}{6}}$

$p = x^2 \geq 0$

שאלה ב'

(1)

$x(y^3 + \ln x)y' + y = 0$:

$(xy^3 + x\ln x)y' + y = 0 \Rightarrow (xy^3 + x\ln x)\frac{dy}{dx} + y = 0$

$\Rightarrow \underbrace{y}_{M}dx + \underbrace{(xy^3 + x\ln x)}_{N}dy = 0$

$M_y = 1,\quad N_x = y^3 + \ln x + 1 \Rightarrow M_y \neq N_x$

$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 - y^3 - \ln x - 1}{xy^3 + x\ln x} = \frac{-(y^3 + \ln x)}{x(y^3 + \ln x)} = -\frac{1}{x} \Rightarrow$ תלוי רק ב-x

$\mu = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$ $\Leftarrow$ גורם האינטגרציה הוא

$\frac{y}{x}dx + \underbrace{(y^3 + \ln x)}_{N}dy = 0$ $\Leftarrow$ ונקבל את המשוואה

$u(x,y) = c$ המשוואה מדויקת, הפתרון הוא

$u(x,y) = \int M dx + \psi(y) = \int \frac{y}{x}dx + \psi(y) = y\ln x + \psi(y)$

$u_y = N = y^3 + \cancel{\ln x} = \cancel{\ln x} + \psi'(y) \Rightarrow \psi'(y) = y^3$

$\Rightarrow \psi(y) = \int y^3 dy = \frac{1}{4}y^4$

$\boxed{y\ln x + \frac{1}{4}y^4 = c}$ $\Leftarrow$ הפתרון הוא:
(בצורה סתומה)

$y \equiv 0$ פתרון

(2) נחשב קירוב $x_2(t)$ ל- $\dot{x} = 2t+x^2$, $x(0)=1$ בתהליך פיקרד:

($\Leftarrow$ $t_0=0$, $x_0=1$)

$$x_0(t) = x_0 = 1$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[\tau, \overbrace{x_0(\tau)}^{=1}]\,d\tau = 1 + \int_0^t (2\tau+1)\,d\tau = 1 + (\tau^2+\tau)\Big|_0^t =$$

$$= 1 + t + t^2$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f[\tau, \overbrace{1+\tau+\tau^2}^{=x_1(\tau)}]\,d\tau = 1 + \int_0^t [2\tau + (1+\tau+\tau^2)^2]\,d\tau \ominus$$

$$\left[(1+\tau+\tau^2)^2 = 1+\tau+\tau^2+\tau+\tau^2+\tau^3+\tau^2+\tau^3+\tau^4 = 1+2\tau+3\tau^2+2\tau^3+\tau^4 \right]$$

$$\ominus\ 1 + \int_0^t [1+4\tau+3\tau^2+2\tau^3+\tau^4]\,d\tau = 1 + \left(\tau+2\tau^2+\tau^3+\tfrac{1}{2}\tau^4+\tfrac{1}{5}\tau^5\right)\Big|_0^t =$$

$$= \boxed{1 + t + 2t^2 + t^3 + \tfrac{1}{2}t^4 + \tfrac{1}{5}t^5}$$

(3) קירוב פתרון ל- $\dot{x} = 2t+x^2$, $x(0)=1$ ($\Leftarrow$ $t_0=0$, $x_0=1$) עד סדר 2

בשיטת הטור — מחפשים מקדמים ש- $c_0=1$. נמצא מקדמים:

$$x(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 = 1 + c_1 t + c_2 t^2$$

$$x'(t) = c_1 + 2c_2 t$$

<u>נציב במד״ר</u>: בהצבה נזניח את כל מה שהוא חזקה גבוהה מ- $\underline{1}$ של t.

תחילה נחשב את x^2: (עד איבר 1 של t)

$$x^2(t) = (1+c_1t+c_2t^2)^2 \approx 1 + c_1 t + c_1 t = 1 + 2c_1 t$$

ההצבה:

$$\dot{x} = 2t + x^2 \Rightarrow$$

$$c_1 + 2c_2 t = 2t + 1 + 2c_1 t \Leftrightarrow$$

$$c_1 + (2c_2 - 2c_1)t = 1 + 2t \Rightarrow c_1 = 1$$

$$2c_2 - 2c_1 = 2c_2 - 2 = 2 \Rightarrow 2c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = 2$$

$\Leftarrow$ הקירוב המבוקש הוא $x(t) = 1 + t + 2t^2$

שאלה ג'

(1) שרטט תמונת פאזה ל- $\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases}$

תחילה נפתור את המד"ר: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{y^2/x^2 - x^2/x^2}{2xy/x^2}$

נסמן $u = \frac{y}{x} \Rightarrow ux = y$ ולכן $y' = u + u'x$

$\frac{u^2-1}{2u} = u + u'x \Rightarrow u'x = \frac{u^2-1}{2u} - u \Rightarrow$

$u'x = \frac{u^2-1-2u^2}{2u} = \frac{-u^2-1}{2u} \Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = \frac{-u^2-1}{2ux} \Rightarrow$

$\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$

$\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \int 2u \cdot \frac{1}{u^2+1}\,du$

שאלה ב'

יהי $F(t,x)$ [illegible]

(1) ניסוח משפט הקיום והיחידות עבור מערכת המשוואות $\dot{x} = F(x,t)$:

בהינתן משוואה (או מערכת) $\dot{x} = F(t,x)$, $F, F'_x \in C(U)$, תנאי התחלה $(t_0, x_0) \in U$, אזי:

א. קיים פתרון לבעיית ההתחלה $\varphi(t)$ כך ש- $\dot{\varphi} = F(t,\varphi)$, [illegible]

ב. פתרון זה הוא יחיד.

ג. פתרון זה רציף [illegible]

(2) הנוסחה [illegible] הגדרת [illegible] אוטונומיות

הנוסחה היא: בהינתן מד"ר אוטונומית $\dot{x} = F(x)$, [illegible]

[illegible] קו [illegible]

הוכחה:

טענת עזר: אם $\varphi(t)$ פתרון למד"ר אוטונומית $\dot{x} = F(x)$, אזי $\varphi_s(t) = \varphi(t+s)$ גם פתרון.

הוכחה:

• $\dot{\varphi}_s = \frac{d\varphi_s}{dt} = \frac{d\varphi(t+s)}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\cdot\underbrace{\frac{d(t+s)}{dt}}_{=1} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \Leftarrow \dot{\varphi}_s = \dot{\varphi}$

• $F(x)$ אינה תלויה ב-t, ולכן $F(\varphi_s) = F(\varphi)$

$\Leftarrow$ ידוע ש-φ פתרון לכן $\dot{\varphi} = F(\varphi)$ ולכן $\dot{\varphi}_s = \dot{\varphi} = F(\varphi) = F(\varphi_s) \Leftarrow \varphi_s$ פתרון [illegible].

כעת נניח בשלילה כי קיימים 2 פתרונות φ,ψ רק שעבור 2 נקודות אלו: $a,b\in\mathbb{R}^{n+1}$

(בהתאם לזה) מתקיים $\varphi(a)=\psi(b)$ וגם $Im(\varphi)\neq Im(\psi)$.

נסמן $\varphi_{a-b}(t):=\varphi(t+a-b)$, וידוע שהמע' אוטונומית, לכן לפי הטענה הנ"ל ש-φ

פתרון אז גם φ_{a-b} פתרון. מתקיים: $\underline{\varphi_{a-b}(b)}=\varphi(b+a-b)=\varphi(a)=\underline{\underline{\psi(b)}}$

לפי משפט היחידות נובע כי $\varphi\equiv\psi$ בתחום.

ולכן גם: $\underline{\underline{Im(\varphi)}}=Im(\varphi_{a-b})=\underline{\underline{Im(\psi)}}$ — בסתירה להנחה.

תמונת הפונ' והזזתה שווה

כלומר $\varphi\equiv\psi$ בתחום.

√

⇐ דרך כל נקודה במרחב הפאזה עובר קו פאזה יחיד. ■

(4) פתרון $t\dot{x}+x=x^2$, $x(2)=1$: ($t\neq 0$ ב' "מפריד" אותו $t\neq 0$.)

$$t\dot{x}+x=x^2 \Rightarrow t\frac{dx}{dt}=x^2-x \Rightarrow t\,dx=(x^2-x)\,dt \Rightarrow$$

$$\underbrace{(x-x^2)}_{M}dt+\underbrace{t}_{N}dx=0$$ מסובך מאוד!

נבדוק האם המשוואה מדויקת:

$$M_x=1-2x,\quad N_t=1 \Rightarrow M_x\neq N_t$$

נמצא גורם אינטגרציה: תלוי ב-x – $\frac{N_t-M_x}{M}=\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+2x}{x-x^2}=\frac{2}{1-x}$

⇐ גורם האינטגרציה: $\mu(x)=e^{\int\frac{2}{1-x}dx}=e^{-2\int\frac{1}{x-1}dx}=e^{-2\ln(x-1)}=$

$$=e^{\ln\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{(x-1)^2}$$

⇐ נכפיל את:

$$-\frac{1}{(x-1)^2}\cdot x(x-1)\,dt+\frac{t}{(x-1)^2}dx=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{M}dt+\underbrace{\frac{t}{(x-1)^2}}_{N}dx=0$$ (אכן עם התנאים הנ"ל מתקיים: $M_x=N_t$)

הפתרון מהצורה $u(t,x)=c$ כאשר:

$$u(t,x)=\int M\,dt+\psi(x)=\frac{xt}{1-x}+\psi(x)$$

מתקיים: $u_x=N=\frac{t}{(x-1)^2}=\frac{t}{(1-x)^2}+\psi'(x) \Rightarrow \psi'(x)=0 \Rightarrow \psi(x)=const$

$$\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1-\cancel{x}+x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}\right]$$

הפתרון הוא:
(פתרון סתום)
עבור c קבוע כלשהו

$$\Rightarrow \boxed{\frac{xt}{1-x}=c}$$

וגם: $\underline{x\equiv 0}$

ואיפה פתרון לבעיית ההתחלה?

איך זה?
פתרון לבעיית ההתחלה?

(2)

$$\ddot{x} + 9x = 0$$

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{3it} + c_2 e^{-3it} = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t$$

אם נעבור הנקודה $(1, \frac{\pi}{12})$ אזי שני פתרונות $\sqrt{2}\cos(3t)$

[illegible] $\sqrt{2}\sin(3t)$ [illegible]

[illegible] 2 פתרונות [illegible] נקודה [illegible]

[illegible]

למשל, שניהם [illegible], והם [illegible]

[illegible] cos (ולהפך) $\cos(t) = \sin(t + \frac{\pi}{2})$, כלומר [illegible]

2 פתרונות [illegible], שעוברים שניהם בנקודה $(1, \frac{\pi}{12})$, [illegible]

[illegible] התחלה [illegible] שונה, כלומר אין סתירה למשפט הקיום והיחידות.

שאלה ה'

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + y + x^3 \\ \dot{x}_2 = -x - 2y + 3x^5 \end{cases}$$

(1) נקודות קריטיות:

$F(x_1,x_2) = (-2x+y+x^3,\ -x-2y+3x^5) = (0,0)$

$\Rightarrow -2x+y+x^3 = 0 \Rightarrow y = 2x - x^3 = x(2-x^2) \Rightarrow x=0,\ x=\pm\sqrt{2}$

$-x-2y+3x^5 = 0 \Rightarrow 2y = 3x^5 - x \Rightarrow y = \frac{3}{2}x^5 - \frac{1}{2}x \Rightarrow$

$y = \frac{3}{2}x\left(x^4 - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow x=0,\ x^4 = \frac{1}{3}$

נסמן $x^2 = p$, $p^2 = \frac{1}{3} \Leftarrow p = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, נקח רק חיובי...

$x^2 = \sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$

שאלה ו':

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = y^2 - x^2 \end{cases}$$

(1) שרטוט תמונת הפאזה: נחלק ונקבל משוואה הומוגנית

$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$

חילקנו מונה ומכנה ב-x^2

נסמן $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$\Rightarrow y' = u'x + u = \frac{u^2-1}{2u} \Rightarrow$

$u'x = \frac{u^2-1-2u^2}{2u} = -\frac{u^2+1}{2u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{u^2+1}{-2ux} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow$

$$\left[\begin{aligned} &-\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln x + c = \ln\frac{1}{x} + c' \\ &\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \int [\ln(u^2+1)]'\,du = \ln(u^2+1) \end{aligned}\right]$$

$\Rightarrow \ln(u^2+1) = \ln\frac{1}{x} + c' \Rightarrow u^2+1 = e^{\ln\frac{1}{x}+c'} = \underbrace{e^{c'}}_{c} e^{\ln\frac{1}{x}} \Rightarrow$

$u^2 + 1 = c\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow$

$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{c}{x} \Rightarrow y^2 + x^2 = cx \Rightarrow y^2 = -x^2 + cx \Rightarrow y = \pm\sqrt{cx - x^2}$

שרטוט תמונת הפאזה

$y = \pm\sqrt{cx - x^2}$

$cx \geq x^2$

$c \geq x$ $\Leftarrow$ $cx - x^2 \geq 0$

תחום הגדרה:

c ... תחום ההגדרה יהיה ... 0 ...

$y' = \frac{c - 2x}{2\sqrt{cx - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \frac{c}{2}$

שאלה ה'

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x+y+x^3 \\ \dot{y} = -x-2y+3x^5 \end{cases}$$

(1) מציאת נקודות קריטיות:

$$F(x,y) = (-2x+y+x^3,\ -x-2y+3x^5) = (0,0)$$

$$\Rightarrow -2x+y+x^3 = -x-2y+3x^5 \Rightarrow$$

$$3y = 3x^5 - x^3 + x \Rightarrow y = x^5 - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}x = x\left(x^4 + \tfrac{2}{3}x^2 - \tfrac{1}{3}\right)$$

$x = 0$

שורש x מחלק את ... אין פתרון ממשי עבורו. לכן

שהנקודה הקריטית היחידה היא $x=0$ ⇐ $y(0) = 0$

כלומר הנקודה $\boxed{(0,0)}$

(2) לינאריזציה: נחשב תחילה $J(F)$:

$$J(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2-2 & 1 \\ 15x^4-1 & -2 \end{pmatrix}$$

לינאריזציה בנקודה $(0,0)$:

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\xi} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \xi}$$

(3) בדיקת יציבות לנקודה הקריטית היחידה $(0,0)$:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)^2 + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \boxed{-2 \pm i}$$

כיון שהחלק הממשי של שורשי הפולינום האופייני הם שליליים (-2) אזי

הנקודה $\boxed{\text{יציבה לחלוטין}}$ (כלומר החלק הדמיוני שונה מ-0).